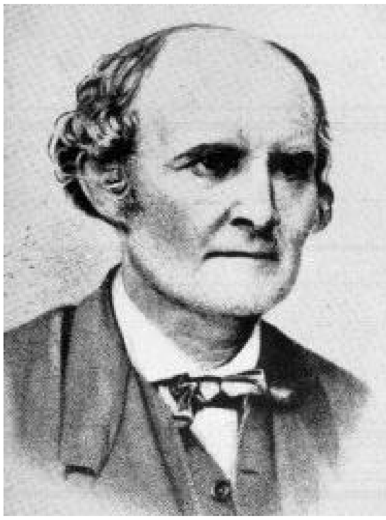
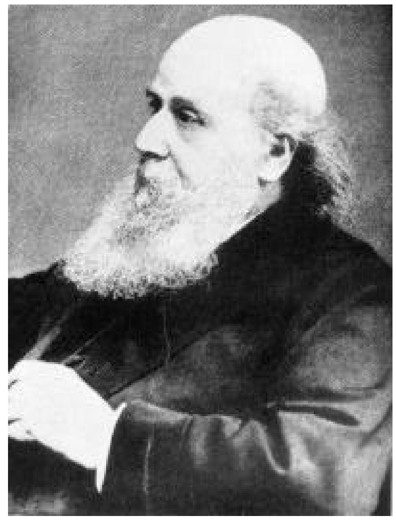
Capítulo Vigesimoprimero
GEMELOS INVARIANTES

CAYLEY Y SYLVESTER



Cayley



Sylvester

La teoría de invariantes surgió a la vida llevada por la fuerte mano de Cayley, pero constituyó finalmente una obra completa de arte, para admiración de las futuras generaciones de matemáticos, debido particularmente a los destellos de la inspiración con que la iluminó la inteligencia de Sylvester

P. A. MacMahon

"Es difícil dar una idea de la vasta extensión de la Matemática moderna. La palabra "extensión" no es la exacta, pues con ella quiero expresar plenitud de bellos detalles; no una extensión completamente uniforme, como la de una estéril llanura, sino el panorama de un bello país- visto al principio a distancia, pero que debe ser recorrido y estudiado en todos los aspectos, desde las colinas y los valles hasta los ríos, rocas, bosques y flores. Pero como para todas las restantes cosas, también para la teoría matemática, la belleza puede ser percibida, pero no explicada".

Estas palabras pronunciadas en el discurso presidencial de Cayley, en 1883, ante la Asociación Británica para el Progreso de la Ciencia, podrían muy bien ser aplicadas a su colosal producción. En su prolífica capacidad inventiva Euler, Cauchy y Cayley se hallan en una categoría, con Poincaré (que murió mucho más joven que cualquiera de los otros) tras ellos a bastante distancia. Esto se refiere únicamente al volumen de la obra de estos hombres; su calidad es otra cuestión, que debe ser juzgada, en parte por la frecuencia con que las ideas engendradas por estos gigantes se repiten en la investigación matemática, y en parte por la simple opinión personal y por los prejuicios nacionales.

La observación de Cayley acerca de la vasta extensión de la Matemática moderna sugiere que limitemos nuestra atención a algunos de los rasgos de su propia obra que introducen nuevas ideas de gran alcance. La obra sobre la que reposa su máxima fama es la teoría de invariantes, que se desarrolló de un modo natural de aquella vasta teoría de la que él, brillantemente apoyado por su amigo Sylvester, fue el creador y el elaborador nunca superado. El concepto de invariante es de gran importancia para la física moderna, particularmente para la teoría de la relatividad, pero no sólo por esto merece atención. Las teorías físicas están evidentemente sometidas a revisión; la teoría de invariantes, como una adición permanente al pensamiento matemático puro, parece reposar sobre terreno más firme.

Otra de las ideas debidas a Cayley, la de la Geometría del "hiperespacio" (espacio de *n* dimensiones), tiene una significación científica semejante, pero posee incomparablemente mayor importancia como Matemática pura. La teoría de matrices es también invención de Cayley. En la Geometría no euclidiana Cayley preparó el camino para el espléndido descubrimiento de Klein, de que la Geometría de Euclides y las Geometrías no euclidianas de Lobatchewsky y Riemann son simplemente aspectos diferentes de un tipo de Geometría más general, que las abarca como casos especiales. La naturaleza de esas contribuciones de Cayley serán brevemente resumidas después de haber bosquejado su vida y la de su amigo Sylvester.

Las vidas de Cayley y de Sylvester deberían escribirse simultáneamente, si esto fuera posible. Cada una de ellas es el reverso perfecto de la otra, y la vida de cada uno de estos matemáticos, suple en gran medida, lo que falta en la del otro. La vida de Cayley fue serena; Sylvester, como él mismo hace notar con amargura, gastó gran parte de su espíritu y energía "combatiendo contra el mundo". El pensamiento de Sylvester era a veces turbulento; el de Cayley era siempre fuerte, tenaz, y reposado. Cayley rara vez se permitía expresiones que no fueran las de una enunciación matemática precisa. El símil citado al comenzar este capítulo es una de las raras excepciones. Sylvester difícilmente podía hablar de Matemática sin hacer gala de su naturaleza poética, casi oriental, y de su inextinguible entusiasmo que frecuentemente le llevaban a estados de arrebato. Sin embargo, fueron íntimos amigos y se inspiraron recíprocamente algunas de las mejores obras que estos hombres realizaron, por ejemplo en las teorías de invariantes y matrices. (Véase más adelante.).

Tratándose de dos temperamentos tan distintos no puede sorprender que su amistad no siempre se deslizara llanamente. Sylvester estaba con frecuencia a punto de explotar. Cayley dejaba obrar serenamente la válvula de la serenidad, confiando en que su excitable amigo recobrarla el juicio cuando pudiera pensar tranquilamente en lo que estaban discutiendo. En cambio Sylvester no se daba cuenta de su fogosa indiscreción. En muchos respectos, la extraña pareja semejaba a dos recién casados, salvo el hecho de que en esta amistad uno de los compañeros jamás perdía la paciencia. Aunque Sylvester tenía siete años más que Cayley, comenzaremos con éste. La vida de Sylvester choca en la tranquila corriente de la vida de Cayley, como contra una roca que se elevase en la mitad de un profundo río.

Arthur Cayley nació el 16 de agosto de 1821 en Richmond, Surrey, siendo el hijo segundo de una familia que residía temporalmente en Inglaterra. Por la parte del padre, la ascendencia de Cayley se remonta a los días de la conquista normanda (1066) y quizá antes, a la época de los barones de Normandía. La familia, como la familia Darwin, abunda en hombres de talento, que podrían proporcionar excelente material para los estudiosos de la herencia. Su madre, Marie Antonia Doughty, parece ser de origen ruso. El padre de Cayley fue un comerciante inglés dedicado al comercio con Rusia. Arthur nació durante una de las periódicas visitas de sus padres a Inglaterra. En 1829, cuando Arthur tenía ocho años, el comerciante se retiró a vivir en Inglaterra. Arthur fue enviado a una escuela privada en Blaekheath, y más tarde, teniendo 14 años, al King's College School de Londres. Su genio matemático se reveló muy precozmente. Las primeras manifestaciones de su talento superior fueron semejantes a las de Gauss. El joven Cayley demostró una asombrosa habilidad para los largos cálculos numéricos, que emprendía para divertirse. Al comenzar el estudio formal de la Matemática rápidamente superó al resto de sus compañeros. Puede decirse que constituyó entre ellos una categoría especial, lo mismo que ocurrió más tarde cuando llegó a la Universidad, estando de acuerdo sus maestros en que el muchacho era un matemático ingénito que debería elegir la Matemática como carrera. En contraste afortunado con los maestros de Galois, los de Cayley reconocieron su capacidad desde el principio y le alentaron. El comerciante retirado puso primeramente obstáculos a que su hijo fuera matemático, pero finalmente, convencido por el director de la Escuela, dio su consentimiento, su bendición y su dinero. Decidió enviar a su hijo a Cambridge.

Cayley comenzó su carrera universitaria, teniendo 17 años, en el Trinity College de Cambridge. Entre sus compañeros fue considerado como "un simple matemático" con una aguda pasión para la lectura de las novelas. Cayley fue, en efecto, durante toda su vida, un devoto del género novelesco algo altisonante, ahora considerado clásico, que entusiasmaba a los lectores de los años 1840 a 1850. Scott parece haber sido su favorito con Jane Austen en segundo termino; más tarde leyó a Thackeray, pero no le gustó. Difícilmente podía leer a Dickens. Los versos de Byron excitaban su admiración, aunque su gusto victoriano, algo puritano, se revelaba algunas veces, y no encontraba simpática la picaresca figura de Don Juan. Las representaciones de Shaskespeare, especialmente las comedias, le deleitaban. Como obras más sólidas y de más difícil digestión leyó la interminable *Historia de Grecia* de Grote y la retórica *Historia de Inglaterra,* de Macaulay. El griego, aprendido en la escuela, fue siempre para él un lenguaje de fácil lectura. Leía y escribía el francés tan fácilmente como el inglés, y su conocimiento del alemán y del italiano, le dieron la oportunidad de nuevas lecturas cuando agotó a los clásicos victorianos (o éstos le habían agotado a él). El género novelesco fue una de sus diversiones, las otras serán mencionadas más adelante.

Al terminar su tercer año en Cambridge, Cayley se había alejado ya tanto del resto de los compañeros en los estudios matemáticos que el profesor trazó una línea bajo su nombre, colocándolo al muchacho en una categoría especial "por encima del primero". En 1842, teniendo 21 años, Cayley fue *senior wrangler*, el primero de la escuela, en los concursos matemáticos, y al mismo tiempo fue colocado en primer término en la prueba aún más difícil para el premio Smith. Cayley se hallaba, pues, en condiciones de que se le permitiera hacer lo que quería durante algunos años. Fue elegido *compañero* del Trinity College y tutor ayudante por un período de tres años. Su nombramiento podía haber sido renovado de haber tomado las órdenes sagradas, pero Cayley, aunque era un ortodoxo de la iglesia anglicana, no podía resistir la idea de ser pastor para obtener un cargo o lograr otro mejor, como muchos hacían, sin que se perturbara su fe o su conciencia.

Sus deberes puede decirse que casi eran nulos. Tuvo algunos discípulos, pero no tan numerosos que le dificultaran su labor. Haciendo el mejor uso posible de su libertad, continuó las investigaciones matemáticas que había comenzado antes de poseer el título. Lo mismo que Abel, Galois y muchos otros, que alcanzaron gran altura en la Matemática, Cayley se dirigió a los maestros por su propia inspiración. Su primera obra, publicada en 1841, cuando tenía 20 años, surgió de su estudio de Lagrange y Laplace.

Sin otro quehacer que lo que deseaba realizar, Cayley publicó, después de obtener su título, ocho trabajos el primer año, cuatro el segundo y tres el tercero. Estos primeros trabajos fueron hechos cuando aun no tenía 25 años, y en el último se planea gran parte de la obra que iba a ocuparle durante los siguientes 50 años. Ya había comenzado el estudio de la Geometría de *n* dimensiones (que él creó), la teoría de invariantes, la Geometría enumerativa de curvas planas y su contribución esencial a la teoría de funciones elípticas.

Durante este período extraordinariamente fructífero no sintió la menor fatiga. En 1843, cuando tenía 22 años, y luego en otras ocasiones, mientras estuvo en Cambridge, se trasladó al continente, y dedicó sus vacaciones a escalar montañas, a hacer largas excursiones, y a pintar acuarelas. Aunque de apariencia débil y delicada, era vigoroso y recio, y muchas veces, después de toda una noche empleada en escalar alguna montaña, volvía al refugio a tomar su desayuno, dispuesto a dedicar algunas horas a sus Matemáticas. Durante su primer viaje visitó Suiza, haciendo excursiones por las montañas. Por entonces se desarrolló en él otra pasión, que duró toda su vida. Su descripción de la "extensión de las Matemáticas modernas", no es un simple ejercicio académico compuesto por un profesor que jamás ha ascendido a una montaña o contemplado amorosamente un bello paisaje, sino el símil exacto de un hombre que conoce la naturaleza íntimamente y de un modo directo.

Durante los últimos cuatro meses de sus primeras vacaciones en el extranjero visitó el norte de Italia. Entonces se iniciaron otras dos nuevas aficiones que habrían de solazarse para el resto de su vida: una comprensiva apreciación de la arquitectura, y un amor por la buena pintura. El mismo gustaba de pintar acuarelas, demostrando marcado talento. Con su amor a la buena literatura, a los viajes, a la pintura y a la arquitectura, y con su profunda comprensión de la belleza natural, se separa totalmente de ese sencillo matemático de la literatura convencional, descrito en su mayor parte por gentes que quizá conocieron algún pedante profesor de Matemática en un colegio, pero nunca vieron un verdadero matemático de carne y hueso.

En 1846, teniendo 25 años, Cayley abandonó Cambridge. No podía obtener ningún cargo como matemático a no ser que llegase a cuadrar su conciencia en la formalidad de las "órdenes sagradas". No hay duda de que para Cayley, como matemático, le hubiera sido más fácil "cuadrar el círculo". En consecuencia, abandonó Cambridge. La ley que, con el Servicio Civil de la India, ha absorbido en un tiempo u otro el capital intelectual más prometedor de Inglaterra, atraía ahora a Cayley. Es muy notable que muchos de los abogados y jueces que ocuparon los primeros puestos en Inglaterra durante el siglo XIX, fueran alumnos distinguidos en los concursos matemáticos de Cambridge, pero no hay que deducir, como algunos pretenden, que el aprendizaje matemático sea una buena preparación para las leyes. Pero en lo que no puede haber duda es que constituye una imbecilidad social colocar a un hombre joven de la talla matemática demostrada por Cayley, en la obligación de resolver pleitos y dedicarse a extender testamentos, transferencias y contratos.

Siguiendo la costumbre habitual de quienes en Inglaterra querían obtener, en la carrera de leyes, un grado distinguido (es decir, superior al cargo de procurador), Cayley ingresó en el Colegio de Lincoln, preparándose para la abogacía. Después de tres años de ser discípulo de un tal Mr. Christie, Cayley ingresó en la abogacía en 1849. Tenía 28 años. Al dedicarse a esa profesión, Cayley resolvió sabiamente que su cerebro no fuera invadido por las leyes, y en consecuencia rechazó más asuntos que los que aceptó. Durante 14 años mortales llevó una vida cómoda, aprovechándose de la oportunidad para obtener renombre y para ganar lo suficiente, pero no más que lo suficiente, para continuar su obra.

Su paciencia en los trabajos rutinarios y aburridos fue ejemplar, casi santa, y su reputación en la profesión aumentó continuamente. Se recuerda que su nombre se conserva en una de las obras de leyes relacionadas con un estudio importante que realizó. Pero es extraordinariamente satisfactorio recordar también que Cayley no era un santo, sino un ser humano normal, y en una ocasión llegó a perder la paciencia. Él y su amigo Sylvester discutían animadamente algún punto de la teoría de invariantes, en la oficina de Cayley, cuando penetró un ayudante, y puso en manos de Cayley un legajo de documentos para su examen. Repentinamente ese legajo le hizo descender a tierra desde las alturas donde se hallaba. La perspectiva de emplear varios días para encontrar algún mezquino recurso que beneficiara en algunas libras a algún opulento cliente, pletórico de dinero era ya demasiado para cualquier hombre que tuviera un buen cerebro en su cabeza. Con una exclamación de disgusto y un gesto de desprecio para aquella “vil suciedad” que tenía entre sus manos, arrojó el legajo al suelo y siguió hablando de Matemática. Este es el único caso que se recuerda en que Cayley perdió su paciencia. Cayley abandonó las leyes en la primera oportunidad, transcurridos 14 años. Pero durante su período de servidumbre publicó entre 200 y 300 trabajos matemáticos, muchos de los cuales se han hecho clásicos.

Como Sylvester apareció en la vida de Cayley durante la fase legal de éste, nos ocuparemos de él en este momento.

James Joseph, para darle el nombre impuesto al nacer, fue el más pequeño de varios hermanos y hermanas. Sus padres eran judíos y surgió a la vida en Londres el 3 de septiembre de 1814. Poco es lo que se sabe de su infancia, pues Sylvester fue poco comunicativo respecto a sus primeros años. Su hermano mayor emigró a los Estados Unidos, donde tomó el nombre de Sylvester, ejemplo seguido por toda la familia. Es un misterio el hecho de que un judío ortodoxo pudiera adornarse con un nombre favorito de los papas cristianos hostiles a los judíos. Posiblemente, el hermano mayor tenía cierto sentido humorístico. Desde entonces James Joseph, hijo de Abraham Joseph, fue para siempre James Joseph Sylvester.

Lo mismo que en el caso de Cayley, el genio matemático de Sylvester se demostró precozmente. Entre los seis y los catorce años asistió a escuelas privadas. En los últimos cinco meses, cuando tenía catorce años, estudió en la Universidad de Londres, dirigido por De Morgan. En un trabajo escrito, en 1840, con el título algo místico *Sobre la derivación de la coexistencia,* Sylvester dice: "Soy deudor de este término (recurrentes) al profesor De Morgan, de quien me jacto ser discípulo".

En 1829, teniendo 15 años, Sylvester ingresó en la Royal Institution de Liverpool, donde permaneció menos de dos años. Al final de su primer año obtuvo el premio en Matemática. Por esta época se hallaba a la cabeza de sus compañeros, siendo colocado en una categoría especial. Estando en la *Royal Institution* también obtuvo otro premio. Esto tiene particular interés, pues establece el primer contacto de Sylvester con los Estados Unidos de América, donde transcurrieron los más felices, y también algunos de los más tristes, días de su vida. El hermano americano, escribano de profesión, sugirió a los directores de las *Lotieries Contractors* de los Estados Unidos que sometieran un difícil problema, que les interesaba, al joven Sylvester. La solución matemática fue tan completa y prácticamente tan satisfactoria para los directores, que concedieron a Sylvester un premio de 500 dólares por su labor.

Los años en Liverpool no fueron en realidad felices. Siempre alegre y franco, Sylvester no estaba muy convencido de su fe judía, pero la proclamaba orgullosamente frente a la mezquina persecución de aquellos jóvenes bárbaros de la Institution que humorísticamente se llamaban a sí mismos cristianos. Pero existe un límite, y finalmente Sylvester huyó a Dublín con sólo algunas monedas en su bolsillo. Felizmente fue reconocido en la calle por un pariente lejano, que le aconsejó y pagó su viaje de vuelta a Liverpool.

Anotaremos aquí otra curiosa coincidencia: Dublín, o al menos uno de sus habitantes, prestó un tratamiento humano en su primera visita al refugiado de Liverpool; once años más tarde el *Trinity College* de Dublín le concedió los grados académicos de Bachiller y *Magister artium,* que su alma mater, la Universidad de Cambridge, le había negado. Por ser judío no podía suscribir aquella mezcla notable de argumentos sin sentido común conocida con el nombre de los Treinta y Nueve Artículos prescritos por la Iglesia Anglicana como el mínimum de creencias religiosas que podía permitirse a una mente racional. Sin embargo, cuando la educación superior inglesa pudo desprenderse, en 1871, de la mano muerta de la iglesia, Sylvester recibió inmediatamente su título *honoris causa.* Haremos notar que en esta como en otras dificultades de su vida, Sylvester no fue un humilde mártir que prolongara sus sufrimientos. Estaba lleno de vigor y coraje, tanto física como moralmente, sabía luchar para que se le otorgara justicia, y frecuentemente lo hizo. Fue, en efecto, un luchador innato con el valor indomable de un león.

En 1831, teniendo 17 años, Sylvester ingresó en el St. John Collego de Cambridge. Debido a varias enfermedades su carrera universitaria fue interrumpida, y no intervino en los concursos matemáticos hasta 1837, ocupando el segundo lugar. Jamás volvió a hablarse del compañero que le venció. Por no ser cristiano, Sylvester no pudo aspirar a los premios Smith.

En la amplitud de sus inquietudes intelectuales Sylvester se parece a Cayley. Físicamente, los dos hombres no tenían parecido alguno. Cayley, aunque fuerte y con gran resistencia física, como hemos visto, era en apariencia débil, y sus maneras eran tímidas y discretas. Sylvester, bajo y macizo con una magnífica cabeza que se alzaba sobre sus hombros, daba la impresión de un tremendo vigor y vitalidad, y en efecto los tenía. Uno de sus discípulos decía que podía haber posado para el retrato de Hereward el Wake, en la novela de Charles Kingsley del mismo nombre. En sus inquietudes fuera de la Matemática, Sylvester era mucho menos limitado y mucho más liberal que Cayley. Su conocimiento de los clásicos griegos y latinos en el idioma original era amplio y exacto, y durante largo tiempo constituyeron sus lecturas. Muchos de sus trabajos están ilustrados por citas de estos clásicos. Las citas son siempre perfectamente apropiadas y realmente aclaran la cuestión.

Lo mismo puede decirse de sus alusiones de otras literaturas. Puede ser de interés para cualquier literato examinar los cuatro volúmenes de sus *Mathematical Papers* y reconstruir así el amplio campo de las lecturas de Sylvester basándose en las citas mencionadas y en otras fases curiosas, de las que no se hacen referencias explícitas. Además del inglés y de la literatura griega y latina, conocía la literatura francesa, alemana e italiana en los idiomas originales. Su interés por los idiomas y por la forma literaria era agudo y penetrante. A él se le debe la mayor parte de la terminología gráfica de la teoría de invariantes. Comentando los numerosos nuevos términos matemáticos que inventó basándose en el griego y el latín, Sylvester se refiere a sí mismo con el nombre del "Adán matemático".

Es muy posible que de no haber sido un gran matemático podría haber logrado ser un poeta más que pasable. El verso y las "leyes" de su construcción le fascinaron toda su vida. Compuso muchas poesías (algunas de las cuales se han publicado), algunas de ellas en forma de soneto. El tema de sus composiciones quizá puede despertar en algunos casos una sonrisa, pero Sylvester demuestra con frecuencia su comprensión de lo que es la poesía. Otro, aspecto de su faz artística es la música, de la que era un bien aficionado. Se dice que Gounod le dio lecciones de canto, y con frecuencia pudo lucir su voz en las reuniones. Estaba más orgulloso de su "do de pecho" que de sus invariantes.

Una de las más notables diferencias entre Cayley y Sylvester puede ser mencionada en este lugar: Cayley era un lector omnívoro de la obra de otros matemáticos; Sylvester encontraba un intolerable fastidio en el intento de comprender lo que otros habían hecho. Una vez, en su vida ulterior, encargó a un joven matemático que le enseñara algo acerca de las funciones elípticas, pues deseaba aplicarlas a la teoría de números (en particular a la teoría de las particiones, que se ocupa del número de formas en que puede ser construido un número dado sumando números de un determinado tipo, todos impares o algunos impares y algunos pares). Después de la tercera lección, Sylvester abandonó su intento, y se dedicó a comunicar al joven sus últimos descubrimientos en Álgebra. Pero Cayley parecía conocer todas las cosas, hasta los temas en que rara vez había trabajado, y su consejo como juez fue buscado por autores y editores de toda Europa. Cayley jamás olvidó lo que había visto alguna vez; Sylvester tenía dificultades para recordar sus propias invenciones, y una vez discutió acerca de si era posible que fuera cierto un teorema por él planteado. Cosas relativamente poco importantes, que todo matemático conoce, eran para Sylvester fuentes de perpetua admiración. Como una consecuencia de esto, cualquier campo de la Matemática ofrecía un mundo encantador de descubrimientos para Sylvester, mientras Cayley contemplaba serenamente lo que ante él se hallaba, veía lo que deseaba, lo incorporaba a sus conocimientos y seguía trabajando.

En 1838, teniendo 24 años, Sylvester obtuvo su primer cargo, el de profesor de filosofía natural (ciencia en general, física en particular), en la University College, de Londres, donde su antiguo maestro De Morgan era uno de sus colegas. Aunque estudió química en Cambridge, y durante toda su vida conservó su interés por estos estudios, poco le placía a Sylvester la enseñanza de la ciencia, y después de dos años abandonó el cargo. Mientras tanto fue elegido miembro de la *Royal Society,* a la desusada edad de 25 años. Los méritos matemáticos de Sylvester eran tan notables que tenían que ser reconocidos, pero no le ayudaban para obtener una posición satisfactoria.

En este punto de su carrera Sylvester vivió una de las desventuras más singulares de su vida. Puede considerarse inocente, cómica o trágica, según como se mire. Lleno de entusiasmo y pletórico de optimismo Sylvester cruzó el Atlántico para ser profesor de Matemática en la Universidad de Virginia, en 1841, el año en que Boole publicó su descubrimiento de los invariantes.

Sylvester permaneció tan sólo tres meses en la Universidad. La negativa de las autoridades universitarias para castigar a un joven que le había insultado, fue la causa de que el profesor dimitiera. Pasado un año de esta desastrosa experiencia, Sylvester intentó vanamente obtener un cargo satisfactorio, solicitando sin resultado un puesto en las Universidades de Harvard y de Columbia. Al fracasar volvió a Inglaterra.

Sus experiencias en América le hicieron abandonar la enseñanza durante los siguientes diez años. Al volver a Londres fue activo actuario de una compañía de seguros de vida. Tal obra para un matemático creador es una droga venenosa, y Sylvester casi dejó de ser matemático. Sin embargo, tuvo algunos discípulos privados, y el nombre de uno de ellos ha sido conocido y reverenciado en todos los países del mundo actual. Era a principios del año 1850, la época en que las mujeres tan sólo se ocupaban de sus afeites y de las obras de beneficencia. Es, pues, sorprendente encontrar que el discípulo más distinguido de Sylvester fuera una joven, Florence Nightingale, el primer ser humano que impuso decencia y limpieza en los hospitales militares, a pesar de las vivas protestas de la tozuda oficialidad. En aquella época Sylvester tenía cerca de 40 años, y la señorita Nightingale seis años menos que su maestro. Sylvester pudo escapar de su provisional forma de ganarse la vida en el mismo año (1854) en que miss Nightingale marchó a la guerra de Crimea.

Pero antes Sylvester había dado otro paso en falso, que no le llevó a parte alguna. En 1846, a la edad de 32 años, ingresó en el Temple (donde modestamente se refiere a sí mismo considerándose como "una paloma anidando entre gavilanes"), para preparar su carrera de leyes, y en 1850 ingresó en la abogacía. Así llegaron a encontrarse él y Cayley. Cayley tenía 29 años, Sylvester 36, y ambos se hallaban apartados de las tareas a que la naturaleza les había llamado. Pronunciando conferencias en Oxford 35 años más tarde, Sylvester rindió tributo a su amigo: "Cayley, aunque más joven que yo, es mi progenitor espiritual, que por primera vez abrió mis ojos para que pudiera ver y admirar los elevados misterios de nuestra común fe matemática". En 1852, poco después de que su amistad se iniciara, Sylvester se refiere a "Mr. Cayley, en cuyos discursos abundan las perlas y rubíes". Mr. Cayley, por su parte, menciona frecuentemente a Mr. Sylvester, pero siempre fríamente. La primera explosión de gratitud de Sylvester en letra impresa tiene lugar en un trabajo de 1851, donde dice: "El teorema antes enunciado (la relación entre los determinantes menores de las formas cuadráticas equivalentes linealmente fue en parte sugerido en el curso de una conversación con Mr. Cayley (a quien le soy deudor de haber vuelto a gozar de la vida matemática)..."

Sylvester quizá exageró, pero hay cierta verdad en lo que dijo. Si no es exacto que resucitara a un muerto, le concedió, al menos, un nuevo par de pulmones. Desde el momento en que conoció a Cayley respiró y vivió la Matemática hasta el fin de sus días. Los dos amigos solían pasear por las salas del colegio de Lincoln discutiendo la teoría de invariantes, que ambos estaban creando, y más tarde, cuando Sylvester se alejó, continuaron a distancia sus conversaciones matemáticas. Ambos eran solteros en aquella época.

La teoría de invariantes algebraicos de la cual se han desarrollado, naturalmente, las diversas ampliaciones del concepto de invariancia, se originó en una observación extraordinariamente sencilla. Como haremos notar en el capítulo sobre Boole, el primer destello de la idea aparece en Lagrange, y desde allí pasó a las obras aritméticas de Gauss. Pero ninguno de estos hombres se dio cuenta de que el sencillo, pero notable fenómeno algebraico que tenían ante ellos, era el germen de una vasta teoría. Tampoco Boole parece haberse dado cuenta completa de lo que encontró al estudiar y extender notablemente la obra de Lagrange. Salvo en una ocasión, Sylvester fue siempre justo y generoso para Boole en las cuestiones de prioridad, y Cayley, como es natural, fue siempre noble.

La simple observación antes mencionada puede ser comprendida por quien alguna vez haya resuelto una ecuación cuadrática, y es sencillamente ésta. La condición necesaria y suficiente de que la ecuación

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

tenga dos raíces iguales es que

$$b^2 - ac = 0.$$

Reemplacemos ahora la variable x por su valor en función de y obtenido por la transformación

$$y = (px + q)/(rx + s).$$

Así x queda sustituida por el resultado de despejar esta x, o sea

$$x = (q - sy)I(ry - p),$$

con lo cual la ecuación dada se transforma en otra en y; es decir, la nueva ecuación es

$$Ay^2 + 2By + C = 0.$$

Realizando las operaciones encontramos que los nuevos coeficientes A, B, C se expresan en función de los coeficientes primitivos a, b, c, como sigue:

$$A = as^2 - 2bsr + cr^2$$
$$B = - aqs + b(qr + sp) - cpr,$$
$$C = aq^2 - 2bpq + cp^2,$$

y ya es fácil demostrar (por simples reducciones si es necesario, aunque hay una forma más sencilla de razonar el resultado sin realmente calcular A, B, C) que

$$B^2 - AC = (ps - qr)^2 \times (b^2 - ac).$$

Ahora, $b^2 - ac$ se llama el discriminante de la ecuación cuadrática en *x;* de aquí, el discriminante de la cuadrática en *y* es $B^2 - AC$ *y* se ha demostrado que el *discriminante de* la ecuación *transformada es* igual al discriminante *de* la ecuación original, *multiplicado por el factor* $(ps - qr)^2$ *que depende sólo de los coeficientes p, q, r, s* en la transformación $y = (px + q)/(rx + s)$ *por medio de* la cual *x venía expresada en* función *de y.*
Boole fue el primero (en 1841) que observó algo digno de nota en esta al parecer insignificante particularidad. Toda ecuación algebraica tiene un discriminante, es decir, cierta expresión (como $b^2 - ac$ para la cuadrática) que es igual a cero si dos o más raíces de la ecuación son iguales y sólo en este caso. Boole se preguntó en primer término: ¿permanece invariable el discriminante de cualquier ecuación cuando su *x* es reemplazada por su afín *y* (como se hizo para la cuadrática) salvo un factor que depende únicamente de los coeficientes de la transformada? Encontró que esto era exacto. Luego se preguntó si no habría otras expresiones, aparte de los discriminantes construidos basándose en los coeficientes, que tuvieran esta misma propiedad de *invariabilidad* después de la transformación. Encontró dos para la ecuación general de cuarto grado. Luego, otro hombre, el brillante matemático alemán F. M. G. Eisenstein (1823-1852), siguiendo el método de Boole, en 1844, descubrió que ciertas expresiones que abarcan tanto *los coeficientes como la x* de las ecuaciones originales muestran el mismo tipo de invariabilidad: los coeficientes originales y la *x* original se transfieren en los coeficientes transformados y en *y* (como para la cuadrática), y las expresiones en cuestión construidas basándose en las originales difieren de las construidas basándose en las transformadas tan sólo por un factor, que depende únicamente de los coeficientes de la transformada.
Ni Boole ni Eisenstein tenían un método general para encontrar tales expresiones invariantes. En este momento intervino Cayley (1845), con su memoria que abre nuevas rutas Sobre *la teoría de las transformaciones lineales.* A la sazón tenía 24 años. Se plantea el problema de encontrar métodos uniformes que proporcionen todas las expresiones invariantes del tipo descrito. Para evitar largas explicaciones el problema ha sido planteado en términos de ecuaciones; en realidad fue abordado de otro modo, pero éste no tiene importancia aquí.
Como la cuestión de la invariancia es fundamental en el pensamiento científico moderno, mencionaremos tres nuevos ejemplos para expresar lo que significa, ninguno de los cuales implica símbolos u operaciones algebraicas. Imaginemos una figura compuesta de líneas rectas y curvas que se cortan, trazadas sobre una hoja de papel. Arrugar el papel de cualquier modo, sin que se rasgue, e intentar pensar cuál es la propiedad más manifiesta de la figura, que es la misma antes y después de arrugar el papel. Hacer lo mismo para cualquier figura dibujada en una lámina de caucho, estirando, pero no desgarrando el caucho, en la forma en que se nos antoje. En este caso es indudable que los tamaños de las áreas y de los ángulos y las longitudes de las líneas no permanecen "invariantes". Estirando adecuadamente el caucho, las líneas rectas pueden haberse deformado constituyendo curvas o líneas tan tortuosas como queramos, y al mismo tiempo las curvas originales, o al menos algunas de ellas, pueden haberse convertido en líneas rectas. Sin embargo, algo en toda la figura ha permanecido invariable, y cuya simplicidad puede ser causa de que pase inadvertido el orden de los puntos sobre cualquiera de las líneas de la figura que marcan los lugares donde otras líneas cortan determinada línea. Por tanto, si movemos el lápiz a lo largo de una línea determinada desde *A* a *C,* y tenemos que pasar por el punto *B* de la línea antes de que la figura sea deformada, tendremos que pasar por *B* al pasar de *A* a *C* después de la deformación. El orden (como se ha dicho) es un invariante respecto de las transformaciones particulares originadas al arrugar el papel para formar una bolita o al estirar la lámina de caucho.

Este ejemplo podrá parecer superficial, pero quien haya leído una descripción no matemática de las intersecciones de las "líneas del mundo" en la relatividad general, y quien recuerde que una intersección de esas dos líneas marca un punto-suceso comprenderá que lo que estamos discutiendo es de la misma categoría que cualquiera de nuestras descripciones del universo físico. La maquinaria matemática suficientemente poderosa para tratar tales "transformaciones" complicadas y realmente producir los invariantes fue la creación de muchos investigadores incluyendo a Riemann, Christoffel, Ricci, Levi-Civita, Lie y Einstein, nombres todos bien conocidos de los lectores de las descripciones vulgarizadoras de la relatividad. Todo el vasto programa se originó por los primeros trabajos en la teoría de invariantes algebraicos, de la cual Cayley y Sylvester fueron los verdaderos fundadores.

Como segundo ejemplo imaginemos que se hace una lazada en una cuerda cuyos extremos están unidos entre sí. Desplazando la lazada a lo largo de la cuerda podemos deformarlas en cierto número de formas. ¿Qué permanece "invariante", qué se "conserva", después de todas estas deformaciones, que en este caso son nuestras transformaciones? Sin duda, el tamaño de la lazada ni la forma son invariantes. Pero el tipo de la lazada es invariante; en un sentido que no necesita ser explicado es el único tipo de lazada siempre que no desatemos los extremos de la cuerda. Además, en la física más antigua, la energía era "conservada"; la cantidad total de energía del Universo era considerada como un invariante, la misma bajo todas las transformaciones desde una forma, tal como la energía eléctrica, en otras, como el calor y la luz.

Nuestro tercer ejemplo de invariabilidad apenas es otra cosa que una alusión a la ciencia física. Un observador fija su "posición" en el espacio y tiempo con referencia a tres ejes perpendiculares entre sí y a un reloj que está andando. Otro observador, que se mueve relativamente al primero, desea describir el mismo suceso físico que el primero describe. También tiene su sistema de referencia espacio-tiempo; su movimiento relativamente al primer observador puede ser expresado como una transformación de sus propias coordenadas (o de las del otro observador). Las descripciones hechas por los dos pueden o no diferir en la forma matemática, según cual sea el tipo particular de transformación. Si sus descripciones difieren, la diferencia no es, como se comprende, inherente al suceso físico que ambos observan, sino a su sistema de referencia y a la transformación. Se plantea entonces el problema de formular sólo aquellas expresiones matemáticas de fenómenos naturales que sean independientes, matemáticamente, de cualquier sistema de referencia particular, y por tanto, son expresados por todos los observadores en la misma forma. Esto equivale a encontrar los invariantes de la transformación que expresan el desplazamiento más general en el "espacio-tiempo" de un sistema de referencia con respecto a cualquier otro. Así, el problema de hallar las expresiones matemáticas para las leyes intrínsecas de la naturaleza es reemplazado por otro abordable en la teoría de invariantes. Nuevos detalles serán añadidos cuando nos ocupemos de Riemann.

En 1863 la Universidad de Cambridge fundó una nueva cátedra de Matemática y le ofreció el puesto a Cayley, quien aceptó inmediatamente. El mismo año, teniendo 42, se casó con Susan Moline. Aunque ganó menos dinero como profesor de Matemática que había ganado en las leyes, Cayley no lamentó el cambio. Algunos años más tarde la Universidad fue reorganizada, y el sueldo de Cayley fue aumentado. Sus deberes también aumentaron desde explicar un curso de lecciones a explicar dos. Su vida estaba ahora dedicada casi completamente a la investigación matemática y a la administración de la Universidad. En esta última tarea, su sólido conocimiento de los negocios, su juicio desinteresado y su experiencia de las leyes fueron insustituibles. Jamás habló en demasía, pero lo que dijo fue ordinariamente aceptado como juicio definitivo, y jamás daba una opinión sin haber meditado detenidamente. Su matrimonio y su vida de hogar fueron felices; tuvo dos hijos, un hijo y una hija. Al pasar los años, su mente permaneció tan vigorosa como cuando era joven, y su carácter se hizo más amable, si esto era posible. En su presencia jamás podía emitirse un juicio excesivamente duro sin provocar su protesta. Para los hombres jóvenes y para los que se iniciaban en la carrera matemática, tuvo siempre una ayuda generosa y un sólido consejo.

Durante la época en que desempeñó la cátedra, la educación superior de las mujeres era una cuestión cálidamente debatida. Cayley puso en juego toda su tranquila y persuasiva influencia en su favor, y gracias a sus esfuerzos las mujeres fueron finalmente admitidas a los estudios en el aislamiento monacal de la medieval ciudad de Cambridge.

Mientras Cayley continuaba sus trabajos matemáticos en Cambridge, su amigo Sylvester continuaba combatiendo contra su mundo. Sylvester jamás se casó. En 1854, teniendo 40 años, se presentó a la cátedra de Matemática en la Real Academia Militar de Woolwich. No la obtuvo. Tampoco logró otro cargo al que aspiró en el Gresbam College de Londres. Su breve conferencia como candidato fue demasiado buena para la junta de gobierno. Sin embargo, el candidato triunfante en Woolwich murió al año siguiente, y Sylvester fue nombrado. Entre sus no demasiados generosos emolumentos se contaba el derecho de pastoreo. Como Sylvester no tenía caballos, ni vacas ni ovejas, y él, por su parte, no comía hierba, es difícil apreciar que beneficios particulares podría obtener de esta inestimable generosidad.

Sylvester mantuvo su cargo en Woolwich durante 16 años, hasta que fue forzosamente "jubilado" en 1870, teniendo 56 años. Se hallaba aún lleno de vigor, pero nada pudo hacer contra los funcionarios oficiales que conspiraban contra él. Gran parte de su labor quedaba aún para el futuro, pero sus superiores consideraron que un hombre de su edad debía ser jubilado.

Otro aspecto de su forzado retiro despertó todos sus instintos combativos. Para completar el plan, las autoridades intentaron hurtar a Sylvester parte de la pensión que le pertenecía legítimamente. Sylvester no lo consintió. Muy a pesar suyo, los estafadores comprendieron que no se trataba de un viejo y dócil profesor, sino de un hombre que podía darles su merecido. Al fin le fue concedida la pensión que le correspondía.

Aunque en las cuestiones materiales abundaron los sucesos desagradables, Sylvester no podía quejarse de los reconocimientos que mereció su obra científica. Numerosos fueron los honores recibidos; entre ellos uno de los más preciados por los hombres de ciencia: el título de miembro extranjero correspondiente de la Academia Francesa de Ciencias, Sylvester fue elegido en 1863 para la vacante de la sección de Geometría causada por la muerte de Steiner.

Después de su jubilación, Sylvester vivió en Londres, versificando, leyendo los clásicos, jugando al ajedrez y trabajando, aunque no mucho, en los problemas matemáticos. En 1870 publicó su folleto *Las leyes del verso.* Poco después teniendo 62 años, volvió repentinamente a la vida matemática. El anciano era inagotable.

La *Johns Hopkins University* había sido fundada en Baltimore en 1875, bajo la brillante dirección del presidente Gilman. Alguien aconsejó a Gilman que comenzara a formar el núcleo de su facultad con un notable erudito de las lenguas clásicas y con el mejor matemático que se pudiera encontrar. Todo lo demás vendría luego, y así ocurrió. Sylvester tuvo al fin un cargo donde prácticamente pudo hacer lo que quiso, empezando por hacerse justicia. En 1876, cruzó nuevamente el Atlántico, y tomó posesión de su cátedra en la *Johns Hopkins University.* Su sueldo era generoso para aquellos días, cinco mil dólares al año. Al aceptar el cargo Sylvester hizo una curiosa estipulación: Su sueldo debía ser "pagado en oro". Quizá pensara en Woolwich, donde le pagaban el equivalente de 2750 dólares más el pastoreo.

Los años desde 1876 a 1883, transcurridos en dicha Universidad, fueron probablemente los más felices y los más tranquilos que Sylvester tuvo. Aunque ya no tenía que "combatir contra el mundo", no se durmió sobre sus laureles. Parecía que se había despojado de cuarenta años, *y* se hallaba más vigoroso que nunca, lleno de entusiasmo y repleto de nuevas ideas. Estaba profundamente agradecido por la oportunidad que le había dado la *Johns Hopkins University* para iniciar su segunda carrera matemática cuando tenía 63 años, y no fue remiso para expresar su gratitud públicamente en el discurso pronunciado en la fiesta del Día de la Conmemoración del año 1877.

En este discurso bosqueja lo que pensaba hacer (y lo hizo) en sus lecciones e investigaciones. "Existen las llamadas formas algebraicas. El profesor Cayley las llama cuánticas [ejemplos: $ax^2 + 2bxy + Cy^2$, $ax^3 + 3bx2y + 3cxy + dy^3$; *los coeficientes numéricos* 1, 2, 1 en la primera, 1, 3, 3, 1 en la segunda, son coeficientes binómicos, como en la tercera y cuartas líneas del triángulo de Pascal (capítulo 5). La siguiente en orden será $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$]. No son propiamente hablando formas geométricas, aunque se pueda, en cierto grado, incluirlas en ellas. Son más bien bosquejos de procesos o de operaciones para formar, para traer a la existencia, podríamos decir, cantidades algebraicas.

“A toda cuántica se asocia una infinita variedad de otras formas que pueden considerarse como engendradas por ella, y flotando como una atmósfera alrededor de ella; pero por infinitas que sean esas existencias derivadas, esas emanaciones de la forma progenitora, se observa que pueden ser obtenidas por composición, por mezcla, de cierto número limitado de formas fundamentales, rayos *standard* como podrían ser denominados en el espectro algebraico de la cuántica a la que pertenecen. Y de igual modo que es labor de los físicos actuales [1877 e inclusive hoy] determinar las líneas fijas en el espectro de cualquier sustancia química, así también la meta y objetivo de una gran escuela de matemáticos es establecer las formas derivadas fundamentales, los *covariantes* [ese tipo de expresión "invariante" ya descrita que abarca tanto las variables como los coeficientes de la forma o cuántica], y los invariantes, como se denominan, de esas cuánticas".

Los lectores matemáticos comprenderán fácilmente que Sylvester hace aquí una analogía muy bella para el sistema fundamental y las sicigias para una forma dada; el lector no matemático debe volver a leer el párrafo para captar el espíritu del Álgebra de que habla Sylvester, pues la analogía es realmente obscura.

En un pie de página Sylvester hace notar: "Tengo al presente una clase de ocho a diez estudiantes que escuchan mis conferencias sobre el Álgebra superior moderna. Uno de ellos, un joven ingeniero entregado a los deberes de su cargo desde las ocho de la mañana hasta las seis de la tarde con un intervalo de una hora y media para comer o hacer visitas, me ha proporcionado la mejor prueba, y la mejor expresada que yo he visto hasta ahora, de lo que llamo [un cierto teorema]...... El entusiasmo de Sylvester, había ya cumplido los sesenta años, era el de un profeta que inspira a los demás a ver la tierra prometida que ha descubierto o que está por descubrir. Enseñaba allí lo mejor que podía, y en la única forma en que puede cumplirse la enseñanza superior.

Tenía siempre algo amable que decir (en los pies de página) acerca del país de adopción: "...Creo que no hay nación en el mundo donde la capacidad cuente tanto, y la simple posesión de la riqueza (a pesar de todo lo que se dice del dólar todopoderoso) cuente tan poco como en América...”

También hace referencia a cómo sus dormidos instintos matemáticos recuperaron la completa capacidad creadora. "Sin la insistencia de un estudiante de esta Universidad [Johns Hopkins] expresándome su deseo de estudiar conmigo el álgebra moderna, jamás se hubiera llevado a cabo esta investigación... Con absoluto respeto, pero con una invencible tenacidad insistía sobre este punto. Quería conocer la nueva Álgebra (los cielos sabrán dónde oyó hablar de ella, pues era casi desconocida en este continente). Me vi obligado a actuar ¿y cuál fue la consecuencia? Intentando aclarar una explicación oscura de nuestros libros, mi cerebro se iluminó; me entregué con renovado celo a un tema que había abandonado durante años y encontré ocasión para que surgieran pensamientos que habían atraído mi atención durante épocas pasadas y que probablemente ocuparán durante varios meses futuros mi capacidad de observación".

Todos los discursos o trabajos de Sylvester contienen muchas cosas que merecen mención en la Matemática, aparte de los tecnicismos. Podría reunirse, hojeando las páginas de sus obras completas, una excelente antología para principiantes, y quizá también para matemáticos maduros. Probablemente ningún otro matemático ha revelado de un modo tan transparente su personalidad a través de sus escritos como lo hizo Sylvester. Le gustaba reunir muchas personas para transmitirles su entusiasmo contagioso por la Matemática. Decía con razón que “en tanto que el hombre continúa siendo un ser gregario y sociable no puede abstenerse de satisfacer el instinto de compartir lo que ha aprendido, de comunicar a los demás las ideas e impresiones que bullen en su cerebro, y si no lo hace, su naturaleza moral se embotará y se atrofiará, y se secarán las fuentes más seguras de su futura provisión intelectual".

Al lado de la descripción de Cayley acerca de la extensión de la moderna Matemática podemos colocar la de Sylvester. "Me apesadumbra pensar que he estado alejado largo tiempo de un campo tan vasto como el ocupado por la matemática moderna. La Matemática no es un libro limitado por unas tapas entre broches de bronce, cuyo contenido sólo exige paciencia para ser descubierto, no es una mina cuyos tesoros pueden exigir largo tiempo para lograrlos, pero que tan sólo constituyen un número limitado de venas y filones; no es un terreno cuya fecundidad pueda agotarse por la obtención de sucesivas cosechas; no es un continente o un océano del que se puedan trazar mapas y limitar sus contornos; es ilimitada, y todo espacio es demasiado estrecho para sus aspiraciones; sus posibilidades son tan infinitas como los mundos que se multiplican cada vez más ante la mirada del astrónomo; es algo incapaz de ser encerrado dentro de determinados límites o reducido a definiciones de validez permanente, como la conciencia, la vida, que parece dormitar en cada mónada, en cada átomo de materia, en cada hoja, en cada célula, siempre dispuesta a engendrar nuevas formas de existencia vegetal y animal".

En 1878 fue fundado por Sylvester el *American Journal of Mathematics*, publicado bajo su dirección por la *Johns Hopkins University*.

El *Journal* dio a la Matemática de los Estados Unidos un tremendo impulso en la dirección adecuada, la investigación. En la actualidad aun da sus frutos matemáticos, pero con dificultades económicas.

Dos años más tarde tuvo lugar uno de los clásicos incidentes en la carrera de Sylvester. Lo narraremos con las palabras del Dr. Fabián Franklin, sucesor de Sylvester en la cátedra de Matemática en la *Johns Hopkins University* algunos años después, y más tarde editor de la American de Baltimore, quien fue testigo ocular (y auditivo).

"Sylvester hizo algunas excelentes traducciones de Horacio y de los poetas alemanes, aparte de escribir cierto número de poesías originales. Los *tours de force* de la rima que realizó estando en Baltimore le sirvieron para ilustrar las teorías sobre la versificación, de las que proporciona ejemplos en su pequeño libro titulado *"Las leyes del verso"*. La lectura del poema Rosalinda en el *Peabody Institute* dio lugar a una muestra muy cómica de su capacidad para abstraerse. El poema consistía en no menos de cuatrocientos versos que rimaban todos con el nombre Rosalinda. El público llenaba la sala esperando divertirse siendo testigo de este experimento poético único en su clase. Pero el profesor Sylvester había creído necesario escribir gran número de notas explicativas, y anunció, que, para no interrumpir el poema, leería todas las notas al principio. Su lectura le sugirió algunas nuevas observaciones improvisadas, y Sylvester estaba tan interesado en su discurso que no se dio cuenta de que el tiempo pasaba y que el público se fatigaba, Cuando terminó la última de las notas miró el reloj y quedó horrorizado al observar que habla empleado hora y media, y aun no había comenzado a leer el poema que el auditorio deseaba escuchar. El asombro que se pintó en su rostro encontró eco en la explosión de una carcajada por parte del público, y entonces, después de comunicar a sus oyentes que se hallaban en perfecta libertad de salir de la sala si tenían otras ocupaciones, leyó el poema Rosalinda".

Las palabras del Doctor Franklin acerca de su maestro lo retratan admirablemente. "Sylvester era un hombre violento e impaciente, pero generoso, caritativo y de corazón tierno. Apreciaba siempre en grado extraordinario la obra de los demás, y tenía la acogida más cálida para todas las muestras de capacidad o de talento de sus discípulos. Era capaz de responder con violencia a la más leve provocación, pero no albergaba resentimiento alguno y estaba siempre dispuesto a olvidar la causa de la querella a la primera oportunidad".

Antes de seguir el hilo de la vida de Cayley donde se cruza nuevamente con la de Sylvester, dejaremos al autor de *Rosalinda* describir como hizo uno de sus más bellos descubrimientos, lo que ahora se llama "formas canónicas", esto significa simplemente la reducción de un "cuántico determinado" a una forma "standard". Por ejemplo $ax^2 + 2bxy + cy^2$ puede ser expresado como la suma de dos cuadrados, o sea $X^2 + Y^2$; $ax^5 + 5bx^4y + 10cx^3y^2 + 10dx^2y^3 + 5exy^4 + fy^5$ puede ser expresada como una suma de tres quintas potencias, $X^5 + Y^5 + Z^5$.)

"He descubierto y desarrollado toda la teoría de las formas binarias canónicas para grados impares, y, por lo que parece, para los grados pares[1], en una sesión, bebiendo vino de Oporto para sostener las energías debilitadas, llevada a cabo a costa de torturar el pensamiento, de congestionar el cerebro y de tener la sensación de haber introducido los pies en un cubo de hielo. *Esa noche no* dormimos más". Los especialistas aceptan que los síntomas son inconfundibles. Pero debe haber sido un excelente oporto, a juzgar por lo que Sylvester obtuvo de su trasiego.

Cayley y Sylvester volvieron a encontrarse cuando aquél aceptó una invitación para dar conferencias en la *Johns Hopkins University*, durante un curso de seis meses en 1881 -1882. Eligió como tema las funciones abelianas, en las que estaba trabajando a la sazón, y Sylvester, que tenía 67 años, asistió fielmente a todas las lecciones de su famoso amigo. Sylvester realizó aún una fecunda labor durante varios años, y Cayley durante un plazo menor.

Describiremos ahora brevemente tres de las más notables contribuciones de Cayley a la Matemática, aparte de su labor sobre la teoría de invariantes algebraicos. Ya hemos dicho que inventó la teoría de matrices, la Geometría del espacio de *n* dimensiones, y que una de sus ideas geométricas arrojó nueva luz (en manos de Klein) sobre la Geometría no euclidiana. Comenzaremos con lo último por ser lo más difícil de comprender.

Desargues, Pascal, Poncelet y otros autores han creado la Geometría *proyectiva* (véase capítulos 5, 13) cuyo objeto es descubrir las propiedades de las figuras que son invariantes en proyección. Mediciones, tamaños de ángulos, longitudes de líneas y los teoremas que dependen de las mediciones, por ejemplo la proposición pitagórica de que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, no son proyectivas sino métricas, y no deben ser tratadas por la Geometría proyectiva ordinaria. Uno de los grandes descubrimientos de Cayley en Geometría fue pasar la barrera que se alzaba ante él, y que separaba las propiedades proyectivas de las propiedades métricas de las figuras. Desde su punto de vista, la Geometría métrica también resalta proyectiva, y el gran poder y flexibilidad de los métodos proyectivos fueron aplicables por la introducción de elementos imaginarios (por ejemplo, puntos cuyas coordenadas implican $\sqrt{-1}$) a las propiedades métricas. Quien haya

[1] Esta parte de la teoría fue desarrollada muchos años más tarde por E. K. Wakeford (1894-1916), quien perdió su vida en la primera Guerra Mundial. "Gracias sean dadas a Dios que nos iguala en esta hora". (Rupert Brooke).

estudiado Geometría analítica recordará que dos círculos se cortan en cuatro puntos, dos de los cuales son siempre imaginarios (existen casos de aparente excepción, por ejemplo los círculos concéntricos, pero esto poco importa para nuestro propósito). Los conceptos fundamentales en Geometría métrica son la distancia entre dos puntos y el ángulo de dos líneas. Reemplazando el concepto de distancia por otro, que también implica elementos "imaginarios", Cayley proporcionó los medios para unificar la Geometría euclidiana y las Geometrías no euclidianas comunes en una teoría comprensiva. Sin el uso de algún tipo de Álgebra no es posible hacer una exposición inteligible de cómo puede lograrse esto. Para nuestro propósito es suficiente recordar el principal descubrimiento de Cayley de unir la Geometría proyectiva y métrica, y conseguir la unificación de las otras Geometrías mencionadas.

La cuestión de la Geometría de *n* dimensiones cuando Cayley la planteó era mucho más misteriosa de lo que nos parece actualmente, habituados como estamos al caso especial de cuatro dimensiones (espacio-tiempo) en la relatividad. Aun suele decirse que una Geometría de cuatro dimensiones es inconcebible para los seres humanos. Esto es una superstición explotada hace largo tiempo por Plücker; es fácil trazar figuras de cuatro dimensiones sobre una hoja de papel, y por lo que se refiere a la Geometría, el conjunto de un "espacio" de cuatro dimensiones puede ser fácilmente imaginado. Consideremos, en primer término, en un espacio tridimensional que no esté sujeto a reglas, *todos los círculos* que pueden ser trazados en un plano. Este *"todo"* es un "espacio" de tres dimensiones, por la simple razón de que emplea precisamente *tres* núme*ros o tres coordenadas* para individualizar uno cualquiera del enjambre de círculos, o sea dos para fijar la posición del centro con referencia a cualquier par de ejes arbitrariamente dados y uno para dar la longitud del radio.

Si ahora el lector desea visualizar un espacio de cuatro dimensiones puede pensar que son líneas *rectas*, en lugar de puntos, los elementos de que está construido nuestro común espacio "sólido". En lugar de nuestro conocido espacio sólido constituido por una aglomeración de puntos infinitamente diminutos, ahora semeja un almiar cósmico de pajas infinitamente delgadas e infinitamente largas y rectas. Pueden apreciarse en efecto, las cuatro dimensiones en las líneas rectas, si nos convencemos (como podemos hacerlo) de que precisamente son necesarios y suficientes cuatro números para individualizar una determinada paja en nuestro almiar. La "dimensionalidad" de un "espacio" puede ser cualquiera que elijamos, siempre que seleccionemos adecuadamente los elementos (puntos, líneas, círculos, etc.) con los cuales lo construimos. Como es natural, si para construir nuestro espacio nos valemos de puntos, nadie que no sea un loco puede conseguir visualizar un espacio de más de tres dimensiones.

La física moderna está enseñando a rechazar la creencia en un misterioso "espacio absoluto" sobre y por encima de los "espacios matemáticos", por ejemplo el de Euclides, que han sido construidos por los geómetras para relacionar sus experiencias físicas. La Geometría actual es en gran parte una cuestión de Análisis, pero la antigua terminología de "puntos", "líneas", "distancias", etc., es útil para sugerirnos algunas cosas interesantes que pueden hacerse con nuestros conjuntos de coordenadas. Pero no hay que deducir que estas cosas son las más útiles que pueden hacerse en Análisis; llegará algún día en que todas ellas resulten relativamente sin importancia frente a cosas más significativas, y si nosotros, fanáticos por nuestras tradiciones anticuadas, las continuamos haciendo, es porque carecemos de imaginación.

Aun queda por descubrir si existe alguna misteriosa virtud en hablar de las situaciones que surgen en el Análisis como si nos remontáramos a las figuras trazadas por Arquímedes en el polvo. Las figuras al fin y al cabo únicamente son adecuadas para los niños pequeños, y Lagrange se abstuvo completamente de esos auxilios infantiles cuando compuso su Mecánica Analítica.

Nuestra tendencia a "geometrizar" el Análisis puede ser una prueba de que todavía no hemos crecido suficientemente. Newton mismo, como es sabido, llegó primeramente a sus maravillosos resultados por la vía analítica, y luego los revistió con las demostraciones de Apolonio, en parte debido a que sabía que la multitud, los matemáticos de menos talento que él, sólo creían que un teorema era cierto al verlo acompañado de una excelente figura y una perfecta demostración euclidiana, en parte debido a que él mismo aun daba la preferencia a la oscuridad precartesiana de la Geometría.

La última de las grandes invenciones de Cayley que hemos elegido para hacer mención de ella es la de las matrices y su Álgebra en sus más amplias líneas. El tema se originó en una memoria escrita el año 1858 y se desarrolló partiendo de las simples observaciones sobre la forma en que se combinan las transformaciones (lineales) de la teoría de invariantes algebraicos. Remontándonos a lo que hemos dicho acerca de los discriminantes y su invariabilidad, señalemos la transformación (la flecha ($\rightarrow$)debe leerse aquí "es reemplazado por") $y \rightarrow \dfrac{px+q}{rx+s}$

Supongamos que tenemos dos de esas transformaciones,

$$y \rightarrow \frac{px+q}{rx+s}$$

$$x \rightarrow \frac{Pz+Q}{Rz+S}$$

la segunda de las cuales debe ser aplicada a la x de la primera. Tendremos

$$y \rightarrow \frac{(pP+qR)+(pQ+Qs)}{(rP+sR)+(rQ+sS)}$$

Atendiendo únicamente a los coeficientes en las tres transformaciones los dispondremos en cuadros, así

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} pP+qR & pQ+qS \\ rP+sR & rQ+sS \end{vmatrix}$$

y vemos que el resultado de realizar las dos primeras transformaciones sucesivamente podrían haber sido escritas por la siguiente regla de "multiplicación"

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pP+qR & pQ+qS \\ rP+sR & rQ+sS \end{vmatrix}$$

donde las filas de los cuadros de la derecha se obtienen de un modo fácil aplicando las filas del primer cuadro de la izquierda a las columnas del segundo. Tales disposiciones (de cualquier número de filas y columnas) se denominan matrices. Su álgebra se deduce de algunos sencillos postulados, de los cuales tan sólo necesitamos citar el siguiente. Las matrices

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

son iguales (por definición) cuando a $= A$, $b = B$, $c = C$, $d = D$, y sólo en este caso. La suma de las dos matrices mencionadas es la matriz

$$\begin{vmatrix} a+A & b+B \\ c+C & d+D \end{vmatrix}$$

El resultado de multiplicar

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \times m$$

(m cualquier número) es la matriz

$$\begin{vmatrix} am & bm \\ cm & dm \end{vmatrix}$$

La regla para "multiplicar" $\times$ (o "componer") matrices se deduce del ejemplo anterior

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix}$$

Un rasgo distintivo de estas reglas es que la multiplicación no es conmutativa, salvo para tipos *especiales* de matrices. Por ejemplo, por la regla tendremos

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Pp+Qr & Pq+Qs \\ Rp+Sr & Rq+Ss \end{vmatrix}$$

y la matriz de la derecha no es igual de la que resulta de la multiplicación

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix}$$

Todos estos detalles, particularmente el último, han sido mencionados para ilustrar un fenómeno que se repite frecuentemente en la historia de la Matemática: las herramientas matemáticas necesarias para las aplicaciones científicas muchas veces han sido inventadas algunas décadas antes de que se haya imaginado la ciencia para la cual la Matemática constituye la clave. La extraña regla de "multiplicación" de matrices, mediante la cual tenemos diferentes resultados según el orden en que practiquemos la multiplicación (a diferencia del Álgebra común, donde $x \times y$ es siempre igual a $y \times x$), parecía que no podría tener ningún uso científico o práctico. Sin embargo, sesenta y siete años después de que Cayley la inventara, Heisenberg, en 1925, reconoció que el Álgebra de matrices era justamente la herramienta que necesitaba para sus trabajos revolucionarios en la mecánica cuántica.

Cayley continuó su actividad creadora hasta la misma semana de su muerte, que tuvo lugar el 26 de enero de 1895, después de una larga y dolorosa enfermedad, tolerada con resignación e inflexible valor. Recordaremos las últimas frases de la biografía de Forsyth. "Fué más que un matemático. Siguiendo un único objetivo, que Wordsworth podría haber elegido para su "Guerrero Feliz", perseveró hasta última hora en el noble ideal de su vida. Su vida tuvo una influencia significativa sobre quienes le conocieron [Forsyth era discípulo de Cayley y fue su sucesor en Cambridge]; ellos admiraron su carácter tanto como respetaron su genio, y se dieron cuenta de que con su muerte el mundo había perdido un gran hombre".

Gran parte de la obra de Cayley ha pasado a la Matemática ordinaria, y es probable que muchas de las investigaciones expuestas en sus *Collected Mathematical Papers* (trece grandes volúmenes en cuarto de cerca de 600 páginas cada uno, comprendiendo 966 trabajos), sugerirán labores provechosas a los matemáticos de las generaciones futuras. En la actualidad, la moda se ha alejado de los campos que mayor interés despertaron a Cayley, y lo mismo puede decirse de Sylvester, pero la Matemática tiene la costumbre de volver a sus antiguos problemas para reunirlos en una síntesis de mayor alcance.

En 1883 Henry John Stephen Smith, el brillante especialista irlandés en la teoría de números y profesor saviliano de Geometría en la Universidad de Oxford, murió en lo mejor de su labor científica, a los 57 años de edad. Oxford invitó al anciano Sylvester, que entonces tenía 70 años, para ocupar la cátedra vacante. Sylvester aceptó la proposición con gran dolor de sus innumerables amigos de América. Pero sentía la nostalgia de su tierra nativa, aunque no le había tratado con demasiada generosidad. Es posible que también le produjera cierta satisfacción darse cuenta de que "la piedra que los constructores habían rechazado iba a ser la piedra fundamental".

El anciano llegó a Oxford para ocupar su cargo con una nueva teoría matemática ("Reciprocantes", invariantes diferenciales) que comunicar a sus discípulos mejor preparados.

Cualquier elogio o justo reconocimiento incitaba siempre a Sylvester a superarse. Aunque en la investigación citada se le había adelantado el matemático francés Georges Halphen, estampó en ella su peculiar genio, dándole vida con su imborrable individualidad.

La conferencia inaugural, pronunciada el 12 de diciembre de 1885, en Oxford, cuando Sylvester tenía 71 años, reveló el fuego y entusiasmo de sus primeros años, y quizá más, pues ahora se sentía seguro y no ignoraba que al fin había sido reconocido por aquel mundo al cual había combatido. Dos de sus párrafos proporcionarán cierta idea del estilo de la conferencia.

"La teoría que voy a exponer, o cuyo nacimiento voy a anunciar, se halla con respecto a ésta ["la gran teoría de los invariantes"] en una relación que no es la de una hermana menor, sino la de un hermano, el cual, basado sobre el principio de que lo masculino es más digno que lo femenino, o, en todo caso, de acuerdo con las disposiciones de la ley sálica, tiene derecho de precedencia sobre su hermana mayor, y ejercerá el mando supremo sobre sus reinos unidos".

Comentando la inexplicable ausencia de un término en cierta expresión algebraica, se entrega a la lírica.

"En el caso que tenemos ante nosotros, esta inesperada ausencia de un miembro de la familia, cuya presencia podía esperarse produce una impresión tal sobre mi mente que llega a actuar sobre mis emociones, Es como una especie de Pléyade perdida en una constelación algebraica, y, finalmente, meditando sobre el tema, mis sentimientos encuentran o buscan alivio en una efusión poética, *un jeu de sottise,* que, no sin temor de parecer extravagante, me aventuro a escribir. Al menos servirá como un interludio y proporcionará cierto alivio al esfuerzo de vuestra atención antes de que prosiga haciendo mis observaciones finales sobre la teoría general.

A UN MIEMBRO QUE FALTA
En Una Familia de Términos en una Fórmula Algebraica

Aislado, mantenido al margen, separado por el destino
de tus camaradas que te esperan ¿a dónde has huido?
¿Dónde languideces después del estado que te ha maravillado
como una estrella perdida en un meteoro fugaz?
Me haces pensar en ese presuntuoso,
que quería, aunque inferior al mayor, ser grande,
y cayó, con la cabeza inclinada, desde lo alto de la inmensidad celeste
para vivir aislado, replegado sobre si mismo, desolado,
o el que, nuevo Heraclio, sufrió duro exilio,
sostenido unas veces por la esperanza, y otras torturado de espanto
hasta que la soberana Astrea, murmurándole al oído
palabras de vago presagio a través del rumor del Atlántico
le abrió el santuario de la Musa venerada
y sembró de llamas el polvo de las orillas de Isis

Después de haber recobrado nuevas fuerzas y bañado las puntas de los dedos en la primavera pieriana, volveremos por breves momentos al banquete de la razón, y haremos algunas reflexiones generales que surgen naturalmente del tema de mi discurso".

Las ideas de Sylvester respecto al parentesco de la Matemática con las bellas artes encuentra su expresión en sus escritos. Así, en un trabajo sobre las reglas de Newton para el descubrimiento de las raíces imaginarias de las ecuaciones algebraicas, se pregunta en un pie de página: "¿No puede definirse la música como la Matemática de los sentidos, y la Matemática como la música de la razón? El músico siente la Matemática, el matemático piensa la música, la música es el sueño, la Matemática la vida laboriosa, cada una de ellas recibirá el apoyo de la otra cuando la inteligencia humana, elevada a su tipo perfecto, brille llena de gloria en algún futuro Mozart-Diriclilet, o Beethoven-Gauss, ¡una unión ya claramente anunciada en el genio y en los trabajos de Helmholtz!".

Sylvester amó la vida aun cuando se viera forzado a luchar contra ella. Se jactaba de que los grandes matemáticos, salvo aquellos casos en que se trató de muertes accidentales o evitables, han vivido largo tiempo, conservando una mente vigorosa hasta el día de su muerte. En su discurso a la *British Association,* en 1869, decía, en apoyo de su tesis, al enumerar algunos de los grandes matemáticos del pasado y recordar la época de su muerte, que " ... no hay ningún estudio en el mundo que dé lugar a una acción más armónica de todas las facultades de la mente que la Matemática... o, como ésta, parezca elevarlas por sucesivos pasos hasta estados cada vez más altos de existencia intelectual consciente... El matemático vive mucho y vive joven; las alas del alma no se abaten precozmente ni se ocluyen sus poros con las partículas levantadas en los caminos polvorientos de la vida vulgar".

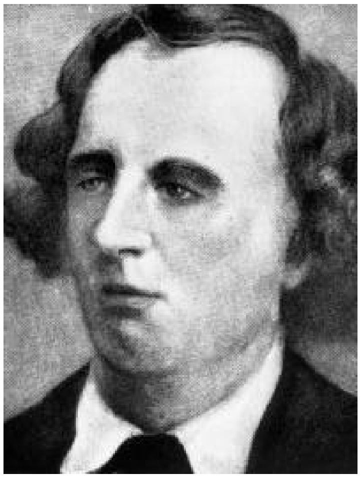
Sylvester era un ejemplo vivo de su propia filosofía, pero al fin tuvo que inclinarse ante los años. En 1893, teniendo 79 años, su vista comenzó a declinar y se sintió cada vez más triste y desalentado al no poder pronunciar sus lecciones con su antiguo entusiasmo. El año siguiente pidió ser relevado de sus más honrosos deberes de la cátedra, y se retiró a vivir solo en Londres o en Tunbridge Wells. Hacía tiempo que sus hermanos y hermanas habían muerto, y también había sobrevivido a sus más queridos amigos.

Su mente se conservaba aún vigorosa, aunque él mismo sentía que la agudeza de su capacidad inventiva se había embotado para siempre. Más tarde, en 1896, cuando tenía 82 años, sintió renovado entusiasmo por una cuestión que siempre le había fascinado, y volvió a trabajar sobre la teoría de las particiones compuestas y la conjetura de Goldbach de que todo número par es la suma de dos primos.

Su trabajo no se prolongó mucho tiempo. Mientras estaba dedicado a sus estudios matemáticos en su alojamiento de Londres, siendo los primeros días de marzo de 1897, sufrió un ataque de parálisis que le privó del habla. Murió el 15 de marzo de 1897, a la edad de 83 años. Su vida puede resumirse con sus propias palabras: "Amo realmente mis estudios".

Capítulo Vigesimosegundo
MAESTRO Y DISCÍPULA

WEIERSTRASS Y SONJA KOWALEWSKI


Weierstrass


Sonja Kowalewski

La teoría que ha tenido el máximo desarrollo en los tiempos recientes es, sin duda alguna, la teoría de funciones.

Vito Volterra

Los jóvenes doctores en Matemática que buscan ansiosamente cargos donde su disciplina y talentos puedan desempeñar algún papel, muchas veces se preguntan si es posible para un hombre realizar largo tiempo la enseñanza elemental y mantener viva la llama matemática. La vida de Boole es una respuesta parcial; la carrera de Weierstrass, el príncipe de los analistas, "el padre del Análisis moderno", es concluyente.

Antes de considerar detalladamente la obra de Weierstrass, le situaremos cronológicamente con respecto a aquellos de sus contemporáneos alemanes que, como él, dieron, al menos, un nuevo aspecto al vasto imperio de la Matemática, durante la segunda mitad del siglo XIX y las tres primeras décadas del XX. El año 1855, el año de la muerte de Gauss y de la ruptura del último eslabón con los matemáticos principales del siglo anterior, puede ser tomado como punto de referencia. En 1855 Weierstrass (1815-1897) tenía 40 años; Kronecker (1823-1891) 32; Riemann (1826-1866) 29; Dedekind (1831-1916) 24, mientras Cantor (1845-1918) era un muchachuelo de 10. La Matemática alemana no carecía, pues, de gentes que siguieran la gran tradición de Gauss. Los méritos de Weierstrass estaban siendo reconocidos; Kronecker se había iniciado con fortuna; cierta parte de la gran obra de Riemann había sido ya realizada y Dedekind había penetrado en el campo de la teoría de números, donde había de obtener su máxima fama. Como es natural, Cantor todavía continuaba en la penumbra.

Hemos reunido estos nombres y fechas debido a que cuatro de los hombres mencionados, aunque muy separados en una gran parte de la obra que realizaron, se asocian en uno de los problemas centrales de toda la matemática, el de los números irracionales. Weierstrass y Dedekind recogieron la discusión de los irracionales y de la continuidad prácticamente donde había sido dejada por Eudoxio en el siglo IV a. J. C; Kronecker, un eco moderno de Zenón, amargó los últimos años de Weierstrass con la escéptica crítica de la revisión de las obras de Eudoxio hecha por aquél; mientras Cantor, siguiendo un nuevo camino, intentaba descubrir el verdadero infinito que está implícito, de acuerdo con algunos, en el concepto de continuidad. De la obra de Weierstrass y Dedekind se desarrolló la época moderna del Análisis, la de la precisión lógica crítica en el Análisis (el Cálculo, la teoría de funciones de variable compleja y la teoría de funciones de variables reales) a diferencia de los métodos intuitivos más laxos de algunos de los antiguos escritores de valor incalculable como guía heurística para el descubrimiento, pero completamente inútiles desde el punto de vista del ideal pitagórico de la demostración matemática. Como ya hemos dicho, Gauss, Abel y Cauchy inauguraron el primer período de rigor. El movimiento iniciado por Weierstrass y Dedekind fue, en un plano superior, adecuado a las mayores exigencias del Análisis en la segunda mitad del siglo, cuando las primitivas precauciones eran insuficientes.

Un descubrimiento de Weierstrass conmovió la escuela intuitiva de analistas que lo consideraron con recelo. Weierstrass había ideado una curva continua que no tiene tangente en ningún punto. Gauss había llamado a la Matemática "la ciencia de los ojos"; era necesario algo más que un buen par de ojos para "ver" la curva que Weierstrass presentó a los abogados de la intuición sensorial. En toda acción se observa una reacción igual y opuesta, y era natural que el excesivo rigor engendrara la correspondiente oposición. Kronecker lo atacó vigorosamente, aunque en forma equivocada y de modo violento. Negó que significase algo. Aunque consiguió ofender al venerable y cordial Weierstrass, causó poca impresión sobre sus conservadores contemporáneos y prácticamente ninguna sobre el Análisis matemático.

Kronecker se hallaba una generación a la cabeza de su tiempo. Fue necesario llegar a la segunda década del siglo XX para que su crítica severa a las doctrinas corrientemente aceptadas de la continuidad y de los números irracionales fueran objeto de una seria consideración. En la actualidad, no todos los matemáticos creen que el ataque de Kronecker fuera hijo de una explosión de envidia despertado por Weierstrass, que algunos de sus contemporáneos consideraban más famoso, y se admite que existe algo de verdad, quizá no mucho, en estas objeciones violentas. De todos modos el ataque de Kronecker fue en parte responsable del tercer período de rigor en el moderno razonamiento matemático, que ahora nosotros conservamos. Weierstrass no fue el único matemático a quien Kronecker criticó; Cantor sufrió también profundamente por lo que él consideraba la persecución maliciosa de su influyente colega. De todos esos hombres nos ocuparemos en el lugar correspondiente; aquí tan sólo intentamos mostrar que sus vidas y obras están ampliamente entrelazadas, al menos en algunas cuestiones fundamentales.

Para completar la descripción, debemos recordar otros puntos de contacto entre Weierstrass, Kronecker y Riemann por una parte, y Kronecker y Dedekind por otra. Abel, recordaremos, murió en 1829, Galois en 1832 y Jacobi en 1851. En la época de que nos estamos ocupando uno de los problemas sobresalientes del Análisis matemático era completar la obra de Abel y Jacobi sobre las funciones periódicas múltiples, funciones elípticas, funciones abelianas (véase capítulos XVII, XVIII). Desde puntos de vista totalmente diferentes, Weierstrass y Riemann cumplieron lo que debía hacerse. Weierstrass, en efecto, se consideró a sí mismo, en cierto grado, como un sucesor de Abel. Kronecker abrió nuevas perspectivas en las funciones elípticas, pero no compitió con los otros dos en el campo de las funciones abelianas. Kronecker fue, en primer término, un aritmético y un algebrista; algunas de sus mejores obras constituyen una elaboración y ampliación de los trabajos de Galois en la teoría de ecuaciones. Por tanto, Galois encontró un digno sucesor no mucho tiempo después de su muerte.

Aparte de sus incursiones en el dominio de la continuidad v de los números irracionales, la obra más original de Dedekind se refiere a la Aritmética superior, que revolucionó y renovó. En esto Kronecker fue su más capaz y sagaz rival, pero, por lo demás, la forma de enfocar los problemas fue completamente diferente y característica de los dos hombres. Dedekind venció sus dificultades en la teoría de números algebraicos refugiándose en el infinito (en su teoría de "ideales" según se dirá en el lugar adecuado); Kronecker intentó resolver sus problemas en el infinito.

Karl Wilhelm Theodor Weierstrass, el hijo mayor de Wilhelm Weierstrass (1790-1869) y de su mujer Theodora Forst, nació el 31 de octubre de 1815, en Ostenfelde, en el distrito de Münster, Alemania. El padre era entonces oficial de aduanas al servicio de Francia. Recordaremos que era el año 1815, el año de Waterloo, y los franceses dominaban aún en Europa. Ese año también fue el del nacimiento de Bismarck, y es interesante observar que mientras la obra de los hombres de Estado más famosos se derrumbó en la primera guerra mundial, si es que no se había derrumbado antes, las contribuciones de sus contemporáneos, relativamente oscuros, a la ciencia y al progreso de la civilización en general, son hoy todavía más estimadas que lo fueron durante su vida.

La familia Weierstrass estaba formada por devotos católicos liberales. El padre se había convertido desde el protestantismo, probablemente en la época de su matrimonio. Karl tuvo un hermano, Peter (que murió en 1904), y dos hermanas (Klara (1823-1896) y Elise (1826 - 1898). La madre murió en 1826, poco después del nacimiento de Elisel y el padre volvió a casarse al año siguiente. Poco se sabe acerca de la madre de Karl, aunque se dice que tuvo por su marido cierta antipatía y que nunca vio su matrimonio con buenos ojos. La madrastra era una típica ama de casa alemana; su influencia sobre el desarrollo intelectual de su hijastro, probablemente fue nula. El padre, en cambio, era un idealista práctico, y un hombre de cultura que en cierta época había sido maestro. Los últimos diez años de su vida transcurrieron pacíficamente en Berlín, en la paz de la casa de su famoso hijo, donde vivían también las dos hijas. Ninguno de los hijos se casó, y aunque el pobre Peter mostró una vez inclinación hacia el matrimonio, prontamente fue desviado de ese camino por su padre y hermanas.

Una posible causa de discordia en la sociabilidad natural de los hijos debió ser el rigor, la dominante autoridad y la testarudez prusiana del padre. Había casi arruinado la vida de Peter con sus constantes prédicas, y estuvo a punto de hacer lo mismo con Karl a quien deseaba dirigir hacia una carrera para la que no tenía aptitudes, sin darse cuenta de cuál era la capacidad de su brillante hijo. El viejo Weierstrass tuvo la audacia de sermonear a su hijo y de mezclarse en sus asuntos hasta cuando "el muchacho" iba a cumplir los 40 años. Por fortuna, Karl estaba constituido de un material resistente. Como veremos, su lucha contra el padre, aunque él mismo probablemente no se daba cuenta de que combatía al tirano, tomó la forma no desusada de poner obstáculos a la forma de vida que su padre había elegido para él. Era la mejor defensa que podía idear, y lo más notable es que ni el hijo ni el padre llegaron a comprender lo que ocurría, aunque una carta de Karl, cuando tenía 60 años, muestra que al fin se dio cuenta de la causa de sus primeras dificultades. Karl recorrió su camino, pero fue un camino largo y tortuoso, sembrado de ensayos y errores. Sólo un hombre como él, de cuerpo y mente poderosa, podía alcanzar el objetivo soñado.

Poco después del nacimiento de Karl, la familia se trasladó a Westernkotten, Westfalia, donde el padre desempeñaba un cargo en las salinas. Westernkotten, como otros tristes rincones donde transcurrieron los mejores años de la vida de Weierstrass, sólo se conoce hoy en Alemania por el hecho de que Weierstrass había sido condenado a enmohecerse allí, aunque no llegó a enmohecerse. Su primer trabajo está fechado el año 1841, (a la edad de 26 años) en Westernkotten. No habiendo escuela en la aldea, Karl fue enviado a la cercana ciudad de

Münster, y luego, a los 14 años, ingresó en el Instituto Católico de Paderborn. Como Descartes en condiciones algo similares, Weierstrass sacó jugo de su escuela, y contrajo amistad con los buenos maestros. Cumplió sus tareas en un tiempo mucho menor que el normal, y todos sus estudios registran un comportamiento uniformemente brillante. Abandonó el Instituto en 1834, teniendo 19 años. Obtuvo premios con inquebrantable regularidad, y un año consiguió siete. De ordinario ocupó el primer puesto en alemán y en dos de las tres materias latín, griego y Matemática. Por una ironía del destino jamás obtuvo un premio en caligrafía, aunque estaba dedicado a enseñar escritura a los muchachuelos que se habían emancipado recientemente de los lazos maternos.

Como los matemáticos suelen gozar de la música, es interesante observar que Weierstrass, tosco como era, no podía tolerar la música en ninguna forma. Nada significaba para él, y tampoco pretendía que tuviera alguna significación. Cuando sus solícitas hermanas intentaban que tomara lecciones de música para hacerle más sociable, solía abandonar el proyecto después de una o dos lecciones mal aprendidas de memoria. Los conciertos le aburrían, y las óperas le provocaban el sueño cuando era arrastrado a alguno de esos espectáculos.

Como su buen padre, Karl no sólo era un idealista, sino también extraordinariamente práctico. Además de obtener la mayor parte de los premios en los estudios que no tenían aplicaciones prácticas, se aseguró una ocupación retribuida cuando tenía 15 años, sirviendo de tenedor de libros en un próspero comercio de jamón y manteca.

Todos estos triunfos iban a tener un efecto desastroso sobre el futuro de Karl. El viejo Weierstrass, como muchos padres, dedujo una errónea conclusión de los triunfos de su hijo. Razonaba, si es que se puede llamar razonar, del siguiente modo. El muchacho había logrado una carretada de premios, por tanto, debía tener talento; lograba ganar dinero desempeñando un cargo en el negocio de un honorable comerciante en manteca y jamón, por tanto debería ser un brillante tenedor de libros. Ahora bien ¿cuál es el ideal de todo tenedor de libros? Sin duda alguna un alto puesto del gobierno en el servicio civil prusiano. Pero para lograr esta elevada posición era deseable un conocimiento de las leyes, así le sería posible triunfar y no caería derrotado.

Como una consecuencia de toda su lógica el pater-familias Weierstrass metió de cabeza a su inteligente hijo, cuando tenía 19 años, en la Universidad de Bonn, para que dominara todas las trapacerías del comercio y todas las sutilezas de las leyes.

Karl no tenía inclinación alguna para esas dos actividades. Dedicó la fortaleza de su cuerpo, su extraordinaria destreza y su aguda inteligencia casi exclusivamente a la esgrima y a la dulce sociabilidad que proporciona el nocturno y liberal consumo de la excelente cerveza alemana.

Para hacer lo que Weierstrass hizo y seguir adelante, hay que tener al menos una décima parte de su fortaleza y no menos de una milésima parte de su talento.

Weierstrass fue invencible en Bonn. Su ojo rápido, su largo brazo, una exactitud demoníaca y su terrible velocidad en la esgrima hicieron de él un contrincante admirable, y se afirma que jamás fue tocado. Ninguna cicatriz adornaba su mejilla y en ninguno de sus duelos llegó a verter una gota de sangre. No está definitivamente establecido si después de algunas de las celebraciones de sus numerosas victorias quedó o no debajo de la mesa. Sus discretos biógrafos son algo reservados acerca de este importante punto, pero quien haya contemplado alguna vez alguna de las obras maestras matemáticas de Weierstrass le parecerá inconcebible que una cabeza tan fuerte como la suya haya podido inclinarse ante un jarro de medio litro. Al fin y al cabo, sus cuatro años de Universidad quizá fueron bien empleados.

Sus experiencias en Bonn tuvieron tres consecuencias de gran interés para Weierstrass: le curaron de la fijación al padre, sin que en modo alguno quedara dañado su afecto por su desilusionado progenitor; le hicieron un ser humano capaz de sentir las esperanzas y aspiraciones de los seres humanos menos dotados que él, sus discípulos, y así contribuyó directamente a su triunfo, que le señala como el maestro matemático probablemente más grande de todas las épocas, y, finalmente, la genialidad humorística de su pubertad constituyó ya para él un hábito de vida. Por tanto, los "años de estudiante" no fueron tan perdidos como su frustrado padre y sus inquietas hermanas suponían, por no decir nada del pobre Peter, cuando Karl volvió al seno de su familia después de cuatro años en Bonn sin conseguir un título.

Se produjo una terrible pelea. Le increparon. Seguramente estaría "enfermo de cuerpo y alma" como resultado natural de no saber suficientes leyes, de conocer poca Matemática y de haber bebido mucha cerveza. Sentados en torno a él le contemplaban iracundos, y, lo peor de todo, comenzaron a discutir acerca de él como si hubiera muerto y estuvieran decidiendo lo que debía hacerse con el cadáver. Con respecto a las leyes, Weierstrass tan sólo había tenido un breve encuentro con ellas en Bonn, pero bastaba, y asombró al Decano y a sus amigos por su aguda "oposición" a ser candidato para el grado de Doctor en Leyes. Por lo que se refiere a la Matemática aprendida en Bonn poco era lo que podía decirse. El único hombre de talento, Julius Plücker, que podía haber ejercido una buena influencia sobre Weierstrass estaba tan ocupado con sus múltiples deberes que no tenía tiempo para gastarlo con los discípulos, y Weierstrass nada pudo obtener de él.

Pero como Abel y muchos otros matemáticos de primera categoría, Weierstrass se dirigió a los maestros en los interludios entre su esgrima, y sus libaciones. Así pudo absorber la *Mecánica celeste* de Laplace, que había de despertar en el joven el interés, que persistió durante toda, su vida, por la dinámica y por los sistemas de ecuaciones diferenciales simultáneas. Como es natural su tozudo padre no podía entender estas cosas y su obediente hermano y sus desalentadas hermanas tan sólo sabían que el demonio hablaba por su boca. El hecho era que Karl, el genio de esta pequeña y timorata familia, sobre el que se habían forjado las mayores esperanzas de respetabilidad burguesa, volvía a su hogar, después de cuatro años de rígida economía por parte de su padre, sin un título universitario.

Al fin, transcurridas algunas semanas, un buen amigo de la familia que había simpatizado con Karl desde su infancia, y que tenía afición por la Matemática, sugirió un camino: que Karl se preparara en la vecina Academia de Münster para ser maestro. El joven Weierstrass no sería doctor en filosofía, pero su cargo como maestro le dejaría ratos de ocio que podría dedicar a la Matemática si en realidad tenía verdaderas inclinaciones hacia ella: Weierstrass confesó "sus pecados" a las autoridades de la Academia, y solicitó una oportunidad para realizar un nuevo intento. Su petición fue concedida, y Weierstrass se matriculó, el 22 de mayo de 1839 en Münster para seguir la carrera de maestro, secundario. Este fue un paso importante para lograr más tarde su elevada posición entre los matemáticos, aunque por aquella época pudo pensarse que ser maestro constituiría su única ambición.

La causa de la diferencia en la conducta de Weierstrass hay que buscarla en la presencia en Münster de Christof Gudermann (1798 - 1852), como profesor de Matemática. En aquella época (1839) Gudermann era un entusiasta de las funciones elípticas. Recordaremos que Jacobi había publicado sus Fundamenta nova en 1829. Aunque son pocos los que ahora recuerdan las complicadas investigaciones de Gudermann (publicadas por incitación de Crelle en una serie de artículos en su Journal), no deben ser olvidadas con tanto menosprecio como suele hacerse por el simple hecho de que hayan pasado de moda. Para su época, Gudermann tuvo lo que parece haber sido una idea original. La teoría de funciones elípticas se puede desarrollar en formas muy diferentes. En una época, cierta forma parece la mejor, mientras en otro momento otra manera algo distinta de abordar la cuestión suele ser considerada como más elegante.

La idea de Gudermann era basar todas las cosas en el desarrollo en serie de potencias de las funciones. (Por el momento nos bastará con estas palabras, cuya significación aparecerá más claramente cuando describamos una de las motivaciones principales de la obra de Weierstrass). Era en realidad una nueva y buena idea, y Gudermann trabajó en ella con la enorme tenacidad alemana durante muchos años, sin quizá darse cuenta de lo que había tras de su inspiración, y que él mismo jamás realizó. Lo más importante en este caso es que Weierstrass hizo de la teoría de series de potencias, inspiración de Gudermann, el nervio de toda su obra en el Análisis. Tomó la idea de Gudermann a cuyas lecciones asistía. En su vida ulterior, contemplando el alcance de los métodos que había desarrollado en el Análisis, Weierstrass solía exclamar: "No hay otra cosa que las series de potencias".

En la conferencia inaugural del curso de Gudermann sobre las funciones analíticas (dicho autor daba diferente nombre, cosa que no tiene importancia) asistieron trece oyentes. Enamorado del tema, el conferenciante abandonaba la tierra, elevándose en el éter del pensamiento puro. En la segunda lección sólo se presentó un oyente, y Gudermann se sintió feliz. El discípulo solitario era Weierstrass. Más tarde ninguna otra persona se aventuró a profanar la santa comunión entre el conferenciante y su único discípulo. Tanto Gudermann como Weierstrass eran católicos y se entendían espléndidamente.

Weierstrass estaba muy agradecido a Gudermann por todo lo que había hecho en su favor, y cuando llegó a ser famoso buscaba todas las oportunidades, cuanto más numeroso público escuchaba, mejor para proclamar su agradecimiento. La deuda no era exigua. Pocos profesores podían ofrecer a sus discípulos algo semejante, la serie de potencias representación de las funciones como un punto de ataque. Además de las lecciones sobre funciones elípticas, Gudermann dio lecciones privadas a Weierstrass sobre "esféricas analíticas".

En 1841, teniendo 26 años, Weierstrass se presentó a los exámenes para obtener el certificado de maestro. El examen se componía de dos partes; escrita y oral. Para la primera se le concedieron seis meses, durante los cuales tenía que escribir tres ensayos sobre tres temas propuestos por los examinadores. El tercer tema dio lugar a una aguda disertación sobre el método socrático en la enseñanza secundaria, método que Weierstrass siguió brillantemente cuando llegó a ser el principal maestro de estudios matemáticos superiores.

Un maestro, al menos en la Matemática superior, puede ser juzgado por los discípulos que forma. Si los discípulos están entusiasmados con sus "claras y bellas lecciones", de las cuales obtienen abundantes apuntes, pero jamás realizan por sí mismos estudios originales al llegar a grados superiores, el maestro debe ser considerado como un completo fracaso cuando se trata de un profesor universitario, y su verdadera esfera de acción debe hallarse en una escuela secundaria o en un colegio particular, cuyo objeto sea producir pulidos petimetres, pero no pensadores independientes. Las lecciones de Weierstrass eran modelos de perfección, pero si tan sólo hubieran sido acabadas exposiciones de diferentes temas, habrían resultado pedagógicamente inútiles. A la perfección de la forma, Weierstrass añadía ese algo intangible que se llama inspiración. Jamás fue un verdadero orador, pero hizo algo más, formó matemáticos creadores en una proporción extraordinariamente elevada de sus discípulos.

El examen que valió a Weierstrass, después de un año de pruebas, el título de profesor de escuela secundaria es una de las cosas más notables que se recuerdan a este respecto. Uno de los trabajos cuya solución se requería constituye el tema más abstruso que puede proponerse para un examen de maestro. En efecto, Gudermann planteó a Weierstrass un verdadero problema matemático: encontrar los desarrollos de series de potencias de las funciones elípticas. Se proponían también otros temas, pero el mencionado era probablemente el más interesante.

El informe de Gudermann acerca del trabajo del aspirante pudo haber cambiado el curso de la vida de Weierstrass de haber sido escuchado, pero no causó ninguna impresión donde debía haberla producido.

En un apéndice al informe oficial Gudermann dice: "Este problema,, que en general sería demasiado difícil para un joven analista, fue incluido en el programa con el consentimiento de la comisión". Después de la aprobación de sus ejercicios escritos y de haberse sometido con excelente resultado al examen oral, Weierstrass obtuvo un certificado especial por su contribución a la matemática. Después de mencionar la labor del candidato y de señalar la originalidad en la forma de abordar el tema y la novedad de algunos de los resultados obtenidos, Gudermann declara que el trabajo pone de manifiesto un exquisito talento matemático "que siempre que no se malogre, contribuirá inevitablemente al progreso de la ciencia. Para bien del autor y para bien de la ciencia sería deseable que no fuera maestro secundario y que se buscaran los medios para permitir que intervenga en la instrucción académica... el candidato entra por derecho propio en el rango de los famosos descubridores".

Estas observaciones en parte subrayadas por Gudermann, fueron borradas del informe oficial. Weierstrass obtuvo su certificado, y esto fue todo. Teniendo 26 años comenzó sus tareas de maestro secundario, que iban a absorberle casi 15 años de su vida, incluyendo la década de los 30 a los 40, que de ordinario se considera como la más fecunda en la carrera de un hombre de ciencia.

Su trabajo era excesivo. Sólo un hombre con una férrea determinación y con un enorme vigor físico pudo hacer lo que Weierstrass hizo. Las noches las reservaba para sí, y vivía una doble vida. No fue un bicho raro ni un sabio aldeano absorbido en misteriosas meditaciones más allá de la comprensión de los vulgares mortales. Halló la forma de divertirse, y los jóvenes funcionarios del gobierno y los jóvenes oficiales encontraron en el amable maestro un excelente compañero de libaciones en la cervecería.

Pero aparte de estos joviales compañeros de algunas noches, Weierstrass reverenciaba a otro, desconocido de sus alegres camaradas, Abel, a quien dedicaba largas vigilias. Weierstrass mínimo decía que las obras de Abel jamás se hallaban lejos de su mano. Cuando llegó a ser el mejor analista del mundo y el mejor maestro matemático de Europa, su primero y último consejo a sus numerosos discípulos fue "leed a Abel". Siempre tuvo una ilimitada admiración por el gran noruego, sin que se proyectara en ella la menor sombra de envidia. "¡Qué feliz es Abel!, solía exclamar, ha hecho algo duradero. Sus ideas siempre ejercerán una fecunda influencia sobre nuestra ciencia".

Lo mismo puede decirse de Weierstrass, y las ideas creadoras con que fecundó a la Matemática fueron en su mayor parte elaboradas cuando era un obscuro maestro de escuela, en apartadas aldeas donde era imposible obtener libros, y en una época de penurias económicas en las que el franqueo de una carta absorbía una parte prohibitiva de la exigua paga semanal del maestro. Al no poder pagar los gastos de franqueo, Weierstrass vio limitada su correspondencia científica. Quizá esto fuera un bien, pues su originalidad se desarrolló sin verse limitada por las ideas de moda de la época. La independencia de juicio caracteriza su obra de los últimos años. En sus lecciones solía presentar todos los problemas en forma personal, sin hacer apenas referencia a la obra de los demás. Esta forma de exponer sus lecciones se prestaba a equívocos, pues sus oyentes no sabían lo que pertenecía al maestro y lo que correspondía a otros autores.

Será de interés para los lectores matemáticos recordar uno o dos períodos de la carrera científica de Weierstrass. Después del año de prueba para lograr el certificado de maestro en el Instituto de Münster, Weierstrass escribió una memoria sobre las funciones analíticas, donde, entre otras cosas, llega al teorema de Cauchy, el llamado teorema fundamental del Análisis. En 1842 tuvo conocimiento de la obra de Cauchy, pero no reclamó la prioridad (realmente Gauss se había anticipado a ambos, pues sus trabajos datan de 1811, pero como era habitual en él, había dejado inédita su labor para que madurara). En 1842, teniendo 27 años, Weierstrass aplicó los métodos que había desarrollado a sistemas de ecuaciones diferenciales, como, por ejemplo, las que plantea el problema newtoniano de los tres cuerpos. El tratamiento estaba ya maduro y era riguroso. Estos trabajos fueron emprendidos sin que pensara publicarlos, simplemente para preparar el terreno sobre el cual debía ser construida la obra esencial de su vida (sobre las funciones abelianas).

En 1842 Weierstrass fue maestro ayudante de matemática y física en el Pro-Gymnasium de Deutsch-Krone, Prusia Occidental. Por entonces fue ascendido al cargo de maestro ordinario. Además de las materias mencionadas, este extraordinario analista enseñaba alemán, geografía, y escritura a los niños que estaban a su cargo. En 1845 fue añadida la gimnasia.

En 1848, teniendo 33 años, Weierstrass fue trasladado como maestro ordinario al Instituto de Braunsberg. Se trataba de un ascenso, pero no era mucho. La dirección del Instituto era desempeñada por un hombre excelente, que hizo cuanto pudo en favor de Weierstrass aunque sólo tenía una remota idea de la capacidad intelectual en su colega. El Instituto se jactaba de poseer una pequeña biblioteca de libros cuidadosamente elegidos sobre Matemática y otras ciencias.

Fue este año cuando Weierstrass se apartó algunas semanas de su absorbente matemática para realizar una deliciosa travesura. Aquellos días se veían perturbados políticamente. El virus de la libertad había infectado al paciente pueblo alemán, y al menos algunas de las almas más audaces se encaminaban por la senda de la democracia. El partido realista que estaba en el poder reclamaba una estricta censura sobre todas las manifestaciones habladas o escritas que no fueran suficientemente laudatorias para su régimen. Por entonces los himnos fugitivos a la libertad comenzaron a aparecer en los diarios. Las autoridades no podían tolerar estas subversiones y cuando en Braunsberg florecieron, repentinamente numerosos poetas democráticos, que cantaban loas a la libertad en los diarios locales no sometidos aún a la censura, el gobierno se apresuró a nombrar un censor, creyendo que así todo que daría arreglado.

Por desgracia, el nuevo censor tenía una violenta antipatía para todas las formas de literatura, especialmente la poesía. En consecuencia, se limitó su supervisión a la aburrida prosa política, y pidió al maestro Weierstrass que se dedicara a la censura de las efusiones literarias. Weierstrass estaba contentísimo. Sabiendo que el censor oficial jamás pasaría la mirada por un poema, Weierstrass encontró la forma de que fueran impresas las más encendidas frases bajo las propias narices del censor. Esto regocijó al pueblo hasta que un funcionario superior puso fin a la farsa. Como el censor era oficialmente el único responsable, Weierstrass escapó libre de culpa.

El oscuro rincón de Deutsch-Krone tiene el honor de ser el lugar donde Weierstrass (en 1842 - 1843) dio por primera vez sus trabajos a la imprenta. Las escuelas alemanas publicaban algunas veces "programas" que contenían trabajos debidos a los miembros del cuerpo. Weierstrass contribuyó con un trabajo: *"Observaciones sobre factoriales analíticas"*. No es necesario explicar lo que son; pero conviene señalar aquí que el tema de las factoriales era uno de los que causaban muchos inútiles dolores de cabeza a los más viejos analistas. Hasta que Weierstrass abordó los problemas relacionados con las factoriales, el nudo de la cuestión había pasado inadvertido. Recordaremos que Crelle había escrito mucho acerca de las factoriales, y hemos visto que se hallaba muy interesado en el problema cuando Abel, algo rudamente, le informó que su trabajo contenía graves descuidos. Crelle entra otra vez en escena, y con el mismo fino espíritu que mostró en el caso de Abel.

El trabajo de Weierstrass no fue conocido hasta 1856, catorce años después de haber sido escrito, cuando Crelle lo publicó en su Journal. Weierstrass era entonces famoso. Admitiendo que el riguroso tratamiento empleado por Weierstrass pone al descubierto los errores de su propia obra, Crelle escribe lo siguiente: "Jamás me he aferrado al punto de vista personal de mi obra, ni he aspirado a la fama ni a los elogios, sino sólo a que la verdad progrese, en cuya labor he puesto lo mejor de mi capacidad; y para mi es lo mismo que la verdad la alcance yo cualquier otro".

Aunque la pequeña aldea de Deutsch-Krone carezca de importancia en la política y el comercio, constituye algo así como la capital de un imperio en la historia de la Matemática, pues fue allí donde Weierstrass, sin el apoyo de una biblioteca y sin ninguna relación con hombres de ciencia, estableció los fundamentos de la obra de su vida, "completar la obra esencial de Abel y Jacobi partiendo del teorema de Abel y del descubrimiento de Jacobi de las funciones periódicas múltiples de varias variables".

Abel, observa Weierstrass, murió en la flor de su juventud, no teniendo la oportunidad de deducir las consecuencias de su extraordinario descubrimiento, y Jacobi no llegó a ver claramente que la verdadera significación de su propia obra debía ser buscada en el teorema de Abel. "La consolidación y ampliación de estas conquistas, la tarea de mostrar las funciones y descubrir sus propiedades, es uno de los problemas principales de la Matemática". Weierstrass declara así su intención de dedicar sus energías a este problema tan pronto como lo haya comprendido totalmente y disponga de los elementos necesarios. Más tarde se queja de la lentitud con que progresan sus estudios: "La elaboración de métodos y otros problemas difíciles ocupan mi tiempo. Los años pasan antes de que pueda llegar al problema principal obstaculizado como me encuentro por un medio desfavorable".

Toda la obra de Weierstrass en el Análisis puede ser considerada como un gran ataque a su problema principal. Resultados aislados, desarrollos especiales y hasta teorías de gran alcance, por ejemplo, la de los números irracionales, como él la desarrolló, se originaron en una fase u otra del problema central. Pronto quedó convencido de que para una clara comprensión de lo que él intentaba hacer era necesario una revisión radical de los conceptos fundamentales del Análisis matemático, y de esta convicción pasó a otra, quizá de mayor significación actual que el problema central: el Análisis debe ser fundado sobre los números enteros comunes 1, 2, 3,... Los irracionales que nos dan los conceptos de límite y continuidad, de los cuales el Análisis surge, deben ser referidos por un razonamiento irrefutable a los números enteros; las falsas pruebas deben ser eliminadas o reformadas, las lagunas deben ser llenadas, y los "axiomas" oscuros deben ser llevados a la luz del estudio crítico, hasta que todos sean comprendidos y expuestos en el lenguaje comprensible de los números enteros. Este es en cierto sentido el sueño pitagórico de basar toda la Matemática sobre los números enteros, pero Weierstrass dio al programa un carácter constructivo definido y realizó la labor.

Se originó así el movimiento del siglo XIX llamado la aritmetización *del Análisis*, algo muy diferente del programa aritmético de Kronecker, del cual nos ocuparemos en un capítulo posterior; en efecto, las dos formas de abordar la cuestión son recíprocamente antagonistas.

De pasada puede señalarse que el plan de Weierstrass para su investigación más importante y el magnífico cumplimiento de la mayor parte de las cosas que se había propuesto cuando era joven, constituye un buen ejemplo del valor del consejo que Félix Klein dio una vez a un discípulo que deseaba conocer el secreto del descubrimiento matemático. "Debéis tener un problema, replicó Klein, elegir un objetivo definido y marchar directamente hacia él. Jamás alcanzaréis la meta, pero encontraréis algunas cosas de interés en el camino".

Desde Deutsch-Krone, Weierstrass fue trasladado a Braunsberg, donde enseñó en el Real Instituto Católico durante seis años, a partir de 1848. El "programa" escolar de 1848-49, contiene un trabajo de Weierstrass que debe haber asombrado a los maestros locales: *Contribuciones* a la *teoría de las integrales abelianas*. Si este trabajo hubiera caído en las manos de alguno de los matemáticos profesionales de Alemania, la suerte de Weierstrass habría cambiado. Pero, como hace notar su biógrafo sueco Mittag-Leffier, no hay que buscar trabajos que marquen una época en la Matemática pura en los programas de los institutos secundarios. Weierstrass hubiera podido emplear las hojas de su trabajo para encender la pipa.

Su siguiente esfuerzo tuvo mejor suerte. Las vacaciones del verano de 1853, (Weierstrass tenía entonces 38 años) transcurrieron en la casa de su padre, en Westernkotten. Weierstrass aprovechó las vacaciones para escribir una memoria sobre las funciones abelianas. Terminada la obra la envió al gran Journal de Crelle, donde fue aceptada, apareciendo en el volumen 47 (1854).

Quizá sea éste el trabajo cuya elaboración fue la causa de un gracioso incidente en las primeras horas de una mañana en que el Director del Instituto quedó sorprendido por un terrible alboroto que procedía de una clase donde en aquel momento debería hallarse Weierstrass. Pero pronto descubrió que éste no se encontraba allí. Se apresuró a visitar al maestro, y rápidamente le fue franqueada la entrada. Allí estaba sentado Weierstrass, meditando a la luz de la lámpara, corridas aún las cortinas de la habitación. Había trabajado toda la noche y no se había dado cuenta de que había amanecido. El director llamó su atención al hecho de que ya era pleno día, y le informó del tumulto que tenía lugar en su clase. Weierstrass replicó que estaba siguiendo la huella de un importante descubrimiento, que despertaría gran interés en el mundo científico, y que no le era posible interrumpir su labor.

La memoria sobre las funciones abelianas, publicadas en el *Journal* de Crelle (1854) produjo gran sensación. Era una obra maestra salida de la pluma del desconocido profesor de un oscuro pueblo, y del que nadie en Berlín había oído hablar. ¡Era asombroso! Pero por muy sorprendente que fuera la magnitud de la obra, todavía más sorprendente era el hecho de que el trabajador solitario no hubiera publicado trabajos previos que anunciaran sus progresos parciales, y que con una admirable modestia hubiera sabido callar hasta que la obra quedase terminada.

Escribiendo a un amigo, diez años más tarde, Weierstrass hace una prudente explicación de su reserva científica: " ... la infinita vacuidad y aburrimiento de aquellos años [como maestro secundario] hubieran sido intolerables sin el arduo trabajo que me hizo un recluso, hasta cuando era considerado como un alegre compañero por el círculo de amigos entre los junkers, abogados, y oficiales jóvenes de la comunidad... El presente no ofrecía nada digno de mencionar, y no era mi costumbre hablar del futuro".

El reconocimiento de su personalidad fue inmediato. En la Universidad de Königsberg, donde Jacobi había hecho sus grandes descubrimientos en el campo en que ahora penetraba Weierstrass con una obra maestra insuperable, Richelot, un digno sucesor de Jacobi en la teoría de funciones periódicas múltiples, era profesor de Matemática. Sus ojos expertos vieron inmediatamente lo que Weierstrass había realizado. Inmediatamente consiguió que su Universidad le concediera el grado de Doctor *honoris causa, y* él mismo se trasladó a Braunsberg para entregar el diploma.

En el banquete organizado por el Director del Instituto en honor de Weierstrass, Richelot afirmó que "todos hemos encontrado nuestro maestro en Weierstrass". El Ministro de Educación le ascendió inmediatamente, concediéndole un permiso de un año para proseguir sus trabajos científicos. Borchardt, el editor del Journal de Crelle en aquella época, se apresuró a marchar a Braunsberg para felicitar al más famoso analista del mundo, iniciándose así una cálida amistad que duró hasta la muerte de Borchardt, ocurrida 25 años más tarde.

Weierstrass no perdió la cabeza. Aunque profundamente emocionado y hondamente agradecido al generoso reconocimiento que rápidamente le habían acordado, no podía prescindir de lanzar una ojeada retrospectiva sobre su carrera. Años más tarde, pensando en la felicidad de la ocasión y en que esa ocasión se había producido para él cuando tenía cuarenta años, decía tristemente: "¡todas las cosas en la vida llegan demasiado tarde!".

Weierstrass no volvió a Braunsberg. No existiendo en aquel moto ningún cargo adecuado para él, los matemáticos alemanes, haciendo frente al caso, consiguieron que Weierstrass fuera nombrado profesor de Matemática en la Real Escuela Politécnica de Berlín.
La excitación producida por las nuevas condiciones de trabajo y el esfuerzo que suponía el desenvolvimiento de los numerosos cursos dieron lugar a un derrumbamiento nervioso. Weierstrass también había trabajado excesivamente en sus investigaciones. En el verano de 1859 se vio forzado a abandonar sus lecciones y a someterse a una cura de reposo. Mejorado, continuó su trabajo, pero en el mes de marzo siguiente fue repentinamente atacado por accesos de vértigo, y sufrió un colapso mientras pronunciaba una conferencia.
Durante el resto de su vida padeció esos mismos trastornos, y al reanudar su labor como profesor ordinario, con un trabajo mucho menor, jamás confió en sí mismo para escribir las fórmulas en la pizarra. Tenía la costumbre de sentarse donde podía ver al mismo tiempo a los oyentes y la pizarra, y dictaba a algún discípulo lo que debía escribir. Uno de estos intérpretes del maestro tenía una marcada propensión a modificar lo que el profesor dictaba. Weierstrass se levantaba, y borraba las fórmulas, haciéndole escribir lo que él quería. Algunas veces la batalla entre el profesor y el obstinado alumno se prolongaba varios rounds, pero finalmente Weierstrass ganaba. En todas las ocasiones el maestro creía hallarse ante sus antiguos y traviesos alumnos.
Como la fama de su obra se extendió por Europa (y más tarde por América), las clases de Weierstrass comenzaron a poblarse en tal grado que el profesor se lamentaba algunas veces de que la calidad de sus oyentes se hallaba muy por debajo de la cantidad. De todos modos, reunió alrededor de él cierto número de jóvenes matemáticos muy capaces, dedicados absolutamente a difundir sus ideas, pues Weierstrass, seguía siempre con su costumbre de ser lento en la publicación. Si no hubiera sido por la difusión de sus conferencias que sus discípulos recogían, su influencia sobre el pensamiento matemático del siglo XIX se habría demorado considerablemente.
Weierstrass fue siempre accesible a sus discípulos, y se interesaba sinceramente en sus problemas, matemáticos o humanos. En él no había nada del complejo del "gran hombre", y prefería volver a su hogar en compañía de sus discípulos, que eran muchos, a ser acompañado por los más famosos de sus colegas, especialmente si el colega era Kronecker. Se sentía feliz sentado ante la mesa con un vaso de cerveza, en amable sociedad con algunos de sus devotos discípulos, insistiendo en pagar el importe de las libaciones como un jovial estudiante.
Una anécdota (de Mittag-Leffler), muestra que la Europa actual ha perdido en parte algo que la caracterizaba en el año 1870. La guerra. francoprusiana (1870 - 1871) dejó en Francia un sentimiento de rencor hacia Alemania, pero este rencor no llegaba al espíritu de los matemáticos, que reconocían los méritos de sus compañeros cualquiera fuera u nacionalidad. Lo mismo puede decirse de las guerras napoleónicas y e la mutua estimación de los matemáticos franceses e ingleses. En 1873 Mittag-Leffler llegó a París, desde Estocolmo, lleno de entusiasma, para estudiar análisis con Hermite. "Estáis equivocado, señor, le dijo Hermite, debéis seguir el curso de Weierstrass en Berlín. Es el maestro e todos nosotros".
Mittag-Leffler siguió el consejo del magnánimo francés, y no tardó mucho en hacer un capital descubrimiento, que puede leerse actualmente en todos los libros sobre la teoría de funciones. "Hermite era francés y un patriota, observa Mittag-Leffler; aprendí al mismo tiempo en qué grado era también un matemático".
Los años (1864 - 1897) de la carrera de Weierstrass en Berlín, como profesor de Matemática, tiene gran interés científico y humano por lo que se refiere al hombre que era reconocido como el mejor analista del mundo. Una parte de estos sucesos exige una referencia más detenida la que podría corresponder a una biografía puramente científica de Weierstrass: su amistad con su

discípula favorita Sonja (o Sofía) Kowalewski, cuyo nombre de soltera era Sonja Corvin-Kroukowsky. Había nacido en Moscú, Rusia, el 15 de febrero de 1850 y murió en Estocolmo, Suecia, el 10 de febrero de 1890, seis años antes de la muerte de Weierstrass.

Teniendo 15 años, Sonja comenzó el estudio de la matemática, y al llegar a los 18 había hecho tan rápidos progresos que ya estaba preparada con gran entusiasmo para estudios superiores. Como procedía de una familia aristocrática y rica pudo satisfacer su ambición de estudiar en el extranjero; y se matriculó en la Universidad de Heidelberg.

Esta joven, de extraordinario talento, no sólo fue la mujer matemática más conocida de los tiempos modernos, sino que también consiguió una reputación como directora del movimiento para la emancipación de las mujeres, particularmente por lo que se refiere a su supuesta incapacidad en el campo de la educación superior.

Además fue una brillante escritora. Siendo muchacha dudó largo tiempo entre la matemática y la literatura. Después de haber compuesto su trabajo matemático más importante (la memoria premiada a que luego nos referiremos), se dirigió a la literatura como un descanso, y escribió los recuerdos de su infancia en Rusia en forma de novela (publicada primeramente en sueco y en danés). De esta obra se dice que "la crítica literaria de Rusia y de los países escandinavos fue unánime al declarar que Sonja Kowalewski estaba a igual altura, en estilo y pensamiento, que los mejores escritores de la literatura rusa". Por desgracia, esta triunfal iniciación fue truncada por su muerte prematura, y tan sólo han sido recogidos fragmentos de otras obras literarias. Su única novela fue traducida a muchos idiomas.

Aunque Weierstrass nunca se casó, no era un empedernido solterón que ponía pies en polvorosa cuando veía acercarse a una bella mujer. Sonja, a juzgar por lo que se dice de ella, era extraordinariamente hermosa. Debemos narrar, en primer término, cómo llegaron a encontrarse Sonja y Weierstrass.

Weierstrass solía aprovechar las vacaciones de verano en una forma muy humana. La guerra francoprusiana fue causa de que tuviera que prescindir de su viaje de verano en 1870, y permaneció en Berlín pronunciando conferencias sobre las funciones elípticas. Debido a la guerra, su clase estaba constituida por 20 discípulos, en lugar de los 50 que solían asistir a sus lecciones dos años antes. Desde el otoño de 1869, Sonja Kowalewski, entonces una muchacha deslumbrante de 19 años, estaba estudiando funciones elípticas con Leo Königsberger en la Universidad de Heidelberg. Allí seguía además las conferencias sobre física de Kirchhoff y Helmholtz y conoció también a Bunsen, el famoso químico, en las graciosas circunstancias que más tarde recordaremos. Königsberger, uno de los primeros discípulos de Weierstrass, era un ferviente devoto de su maestro. Sonja se contagió de su entusiasmo, y resolvió dirigirse directamente a Weierstrass para seguir sus inspiraciones.

La situación de las estudiantes solteras en el año 1870 era algo anómala, y empezaremos por recordar que Sonja, cuando tenía 18 años, había contraído un verdadero matrimonio nominal, habiendo dejado a su marido en Rusia, mientras ella se dirigió a Alemania. Por parecerle una cuestión sin importancia, no se había cuidado de informar a Weierstrass, al principio, de que estaba casada.

Decidida a seguir las lecciones del maestro, Sonja reunió valor y visitó a Weierstrass en Berlín. Ella tenía 20 años y era muy trabajadora, muy seria y muy resuelta; él tenía 55, y no olvidaba a Gudermann, a quien debía lo que era, que le había enseñado con el ejemplo a sentir una simpática comprensión para las ambiciones de la gente joven. Para disimular su azoramiento, Sonja llevaba un gran sombrero, que casi le tapaba el rostro, "por tanto, Weierstrass no llegó a ver aquellos maravillosos ojos, a cuya elocuencia, cuando ella lo deseaba, nadie podía resistir".

Dos o tres años más tarde, visitando Heidelberg, Weierstrass supo de labios de Bunsen, un terrible solterón, que Sonja era "una mujer peligrosa". Weierstrass se divirtió mucho del terrible terror de su amigo, pues Bunsen no sabía que Sonja había recibido frecuentes lecciones privadas de Weierstrass durante dos años.

El pobre Bunsen basaba su opinión respecto a Sonja en una amarga experiencia personal. Durante años había proclamado que a ninguna mujer, y especialmente a ninguna mujer rusa, le sería permitido profanar la santidad masculina de su laboratorio. Una de las amigas rusas de Sonja deseaba ardientemente estudiar química en el laboratorio de Bunsen, y al no haber sido admitida se dirigió a Sonja, para que ensayara su capacidad de persuasión sobre el áspero químico. Dejando el sombrero en su casa, Sonja visitó a Bunsen. El químico no pudo resistir los encantos de Sonja y aceptó a su amiga para que trabajara en su laboratorio. Después de terminar la entrevista se dio cuenta de lo que había hecho, y Bunsen se lamentaba diciendo: "Ahora esa *mujer* me ha hecho comer mis propias palabras".

La evidente seriedad de Sonja en su primera visita impresionó favorablemente a Weierstrass, quien inmediatamente escribió a Königsberger preguntándole acerca de sus aptitudes matemáticas. El maestro indagaba también si "la personalidad de la dama ofrecía las necesarias garantías". Habiendo recibido una contestación llena de entusiasmo, Weierstrass intentó obtener de la Comisión Directiva de la Universidad que admitiese a Sonja a sus conferencias matemáticas. Al ser bruscamente rechazada la petición decidió dedicar a la joven sus horas libres. Todos los domingos por la tarde Sonja visitaba al maestro, y una vez por semana Weierstrass devolvía su visita. Después de algunas lecciones, Sonja abandonó su sombrero. Las lecciones comenzaron en el otoño de, 1870 y continuaron, con ligeras interrupciones debidas a vacaciones y enfermedades, hasta el otoño de 1874. Cuando por alguna razón los amigos no podían reunirse, mantenían correspondencia. Después de la muerte de Sonja en 1891, Weierstrass quemó todas las cartas de ella, junto con otra correspondencia, y probablemente con algún trabajo matemático.

La correspondencia entre Weierstrass y su encantadora amiga es cálidamente humana, hasta cuando las cartas se refieren especialmente a la Matemática. Gran parte de esa correspondencia tenía, sin duda, considerable importancia científica, pero desgraciadamente Sonja era una mujer poco ordenada, y muchos de los documentos encontrados después de su muerte eran trabajos fragmentarios en terrible confusión.

El mismo Weierstrass no admitía parangón a este respecto. Sin conservar copias, prestaba sus manuscritos inéditos a los discípulos, que no siempre los devolvían. Algunos llegaron a apropiarse indebidamente investigaciones del maestro, publicando los resultados como propios. Aunque Weierstrass se queja de esta condenable práctica en las cartas a Sonja, su lamentación se refiere más al hecho de que sus trabajos cayeran en manos incompetentes, con el consecuente daño para la Matemática, que al hecho de que le fueran arrebatadas sus ideas. Sonja, como es natural, jamás hizo nada parecido, pero en otro respecto tampoco está libre de culpa. Weierstrass le envió uno de sus trabajos inéditos, entre los muchos que tenía, y no volvió a verlo. Parece que la joven lo perdió, pues discretamente trata de eludir la cuestión siempre que el maestro se refiere a ella.

Para compensar esta falta, Sonja hizo cuanto pudo para que Weierstrass tomara razonables precauciones respecto al resto de su obra no publicada. Weierstrass tenía la costumbre de transportar en sus frecuentes viajes una gran caja de madera blanca donde encerraba todas sus anotaciones, y los diversos apuntes referentes a trabajos que aun no había terminado. Era su hábito modificar las teorías muchas veces hasta que encontraba la forma mejor, la forma natural de desenvolverlas. En consecuencia publicaba con lentitud, y tan sólo ponía su firma bajo el trabajo cuando había agotado el tema desde todos los puntos de vista. Varios de sus proyectos en

embrión estaban guardados ,en la misteriosa caja. En 1880, mientras Weierstrass realizaba un viaje de vacaciones, perdió la caja, y jamás volvió a oír hablar de ella.
Después de obtenido su título in *absentia*, Sonja volvió a Rusia, desde Göttingen en 1874, para descansar del exceso de trabajo. Su fama la precedió y su reposo consistió en entregarse a las vanidades de una vida social en San Petersburgo, mientras Weierstrass, que permanecía en Berlín, intentaba por toda Europa buscar a su discípula favorita una posición digna de su talento. Sus esfuerzos inútiles le enemistaron con muchos de los estrechos talentos académicos ortodoxos.
En octubre de 1875, Weierstrass recibió de Sonja la noticia de que su padre había muerto; pero parece que ella jamás contestó a su conmovida condolencia, y durante casi tres años no tuvo la menor noticia de su vida. En agosto de 1878, Weierstrass volvió a escribir a su antigua discípula preguntándole si había recibido una carta escrita hacía tanto tiempo que había olvidado la fecha. "¿No recibisteis mi carta? ¿Qué puede impediros confiar libremente en mí, vuestro mejor amigo, como solíais llamarme, y según acostumbrabais a hacer? Es un enigma cuya solución ninguna otra persona puede darme...
En la misma carta Weierstrass le pide patéticamente que niegue el rumor de que ha abandonado la Matemática. Chebycheff, un matemático ruso, visitó a Weierstrass cuando éste se hallaba ausente, pero le comunicó a Borchardt que Sonja se "había entregado a la vida social", y así había ocurrido en efecto. "Dirija su carta a Berlín, a la, antigua dirección, concluye Weierstrass, será un regalo para mí".
La ingratitud del hombre para el hombre es un tema bastante conocido; Sonja demostró ahora que una mujer puede hacer lo mismo cuando quiere. No respondió a la carta de su viejo amigo, aunque sabía que ello le disgustaba y que su salud era precaria.
La respuesta, cuando llegó, fue todavía peor. Sonja se acordó que era mujer, y consideró como la mejor de sus ambiciones vivir felizmente con su marido. Desgraciadamente para ella fue el foco de una admiración aduladora y torpe de una serie de artistas, periodistas y supuestos literatos superficialmente brillantes, que ensalzaban sin cesar su insuperable genio. Si hubiera frecuentado la sociedad de intelectuales que le correspondía, habría continuado una vida normal y mantenido su entusiasmo. Además, no habría tratado al hombre que moldeó su talento del modo indigno en que lo hizo.
En octubre de 1878 nació "Foufie", la hija de Sonja.
El forzado reposo después de la llegada de Foufie hizo revivir el interés matemático de la madre, y entonces escribió a Weierstrass para, lograr sus consejos. Weierstrass contestó que debía repasar la bibliografía más importante antes de aventurar una opinión. Aunque ella le había despreciado, seguía dispuesto a alentaría en lo que pudiera. Su única lamentación (en una carta de octubre de 1880) es que su largo, silencio le había privado de la oportunidad de ayudarla. "No me gusta, hablar demasiado del pasado cuando tenemos el futuro ante nuestros ojos".
Tribulaciones materiales llevaron a Sonja al camino de la verdad. Habiendo nacido matemática no podía alejarse de la Matemática, lo mismo que los patos no pueden alejarse del agua. Por tanto, en octubre de 1880 (cuando tenía 30 años) volvió a escribir a Weierstrass solicitando nuevamente consejo. No tuvo paciencia para esperar la contestación, y se trasladó inmediatamente desde Moscú a Berlín. De haber recibido la respuesta quizá hubiera permanecido donde estaba. De todos modos, cuando la aturdida Sonja llegó inesperadamente, Weierstrass, le dedicó todo un día para resolver sus dificultades. La charla debió ser larga y provechosa, pues cuando volvió a Moscú, tres meses más tarde, se dedicó a la Matemática con tal furia que sus alegres amigos y necios parásitos no la reconocían. Por consejo de Weierstrass abordó el problema de la propagación de la luz en un medio cristalino.

En 1882 la correspondencia sigue dos nuevos rumbos, uno de los cuales tiene interés matemático. El otro es la franca opinión de Weierstrass de que Sonja y su marido no han nacido el uno para el otro, especialmente debido a que el marido no aprecia los méritos intelectuales de ella. El punto matemático se refiere a Poincaré, que se hallaba al comienzo de su carrera. Con su instinto seguro para reconocer los talentos jóvenes, Weierstrass considera a Poincaré como un hombre del futuro, y espera que llegará a curarse de su propensión a publicar con demasiada rapidez y que sabrá aguardar a que sus investigaciones maduren sin que se difundan en un campo demasiado amplio. "Publicar un artículo de verdadero mérito todas las semanas es imposible", decía Weierstrass refiriéndose al diluvio de trabajos de Poincaré.

Las dificultades domésticas de Sonja se resolvieron con la muerte repentina de su marido, en marzo de 1883. En aquella época Sonja estaba en París y él en Moscú. La conmoción la dejó postrada. Durante cuatro días permaneció sola, rechazando el alimento, pero al sexto día pidió papel y lápiz, y comenzó a escribir fórmulas matemáticas. Hacia el otoño ya se hallaba repuesta, y asistió a un congreso científico en Odesa.

Gracias a Mittag-Leffler, Sonja Kowalewski obtuvo al fin la posición ambicionada. En otoño de 1884 pronunció conferencias en la Universidad de Estocolmo, donde fue nombrada más tarde (1889) profesora. Poco después tuvo una contrariedad desconcertante cuando el matemático italiano Vito Volterra señaló un grave error en su obra sobre la refracción de la luz en un medio cristalino. Este error había escapado a Weierstrass, quien por entonces estaba tan sobrecargado de trabajo con sus deberes oficiales, que, aparte de ellos, "tan sólo tenía tiempo para comer, beber y dormir". Weierstrass decía: "Padezco lo que los doctores llaman agotamiento del cerebro". Tenía por entonces cerca de 70 años, pero aunque sus males físicos aumentaban, su capacidad intelectual permanecía tan poderosa como siempre.

Al cumplir el maestro los setenta años, le fueron rendidos honores públicos, acudiendo sus discípulos nuevos y viejos de todas las partes de Europa. Más tarde, sus conferencias fueron cada vez más escasas, pero durante 10 años recibió a algunos de sus discípulos en su propia casa. Cuando veían que estaba fatigado, daban de lado la Matemática y hablaban de otras cosas, o escuchaban las palabras del sociable anciano recordando sus travesuras de estudiante y los tristes años de su aislamiento. Sus ochenta años fueron celebrados con una ceremonia aun más impresionante, pues Weierstrass llegó a ser, en cierto grado, un héroe nacional del pueblo alemán.

Una de las mayores alegrías que tuvo Weierstrass en sus últimos años fue al saber que su discípula favorita había recibido el premio que merecía. En las Navidades de 1888 le fue entregado a Sonja personalmente el premio Bordin de la Academia Francesa de Ciencias, por su memoria: *Sobre la rotación de un cuerpo sólido alrededor de un punto fijo.*

Como es costumbre en tales premios la memoria debía ser presentada anónimamente (el nombre del autor era enviado en sobre cerrado, llevando fuera el mismo lema inscripto en la memoria, y el sobre únicamente se abría cuando se trataba de la obra que había obtenido el premio), de modo que los celosos rivales no tenían la oportunidad de insinuar que el premio se había logrado por influencias. En opinión de los jueces el trabajo tenía un mérito tan excepcional que se aumentó la cuantía del premio desde 3.000 francos a 5.000. El valor monetario era, sin embargo, lo menos importante del premio.

Weierstrass no cabía de gozo. "No necesito deciros, escribía, hasta qué punto sus triunfos han alegrado mi corazón y los de mis hermanas, así como el de sus amigos. Yo particularmente he experimentado una verdadera satisfacción. Jueces competentes han dictado su veredicto de que mi fiel discípula, mi “punto débil”, no es una “frívola tramposa”.

Dejemos a los amigos en su momento de triunfo. Dos años más tarde (10 de febrero de 1891) murió Sonja en Estocolmo, teniendo 41 años, después de un breve ataque de gripe, que en aquella época era epidémica. Weierstrass la sobrevivió seis años, muriendo pacíficamente, cuando tenía 82 años, el 19 de febrero de 1897, en su casa de Berlín después de una larga enfermedad complicada con gripe. Su último deseo fue que el sacerdote no pronunciara alabanza alguna durante los funerales, y que se limitara a los rezos habituales.
Sonja está enterrada en Estocolmo; Weierstrass, con sus dos hermanas, en un cementerio católico de Berlín. Sonja pertenecía también a la fe católica, a la Iglesia cristiana.
Haremos una alusión a dos de las ideas básicas sobre las que Weierstrass fundó su obra en Análisis. Los detalles o una explicación exacta estarían fuera de lugar aquí, y pueden encontrarse en los primeros capítulos de cualquier libro que trate de la teoría de funciones. Una *serie de potencias es* una expresión de la forma

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + ... + a_nz^n$$

en la cual los coeficientes a_0, a_1, a_2, ..., a_n... son números y z una variable; los números correspondientes pueden ser reales o complejos.
Las sumas de 1, 2, 3,... términos de la serie, o sea a_0, $a_0 + a_1z$, $a_0 + a_1z + a_2z$,... se llaman *sumas parciales. Si* para algún valor particular de z esas sumas parciales dan una sucesión de números que convergen hacia un límite definido, se dice que la serie de potencias convergen hacia el mismo límite para ese valor de z.
Todos los valores de z para los cuales las series de potencias convergen hacia un límite constituyen el *campo de convergencia* de las series; para cualquier valor de la variable z en este campo las series convergen; para otros valores de z divergen.
Si las series convergen para algún valor de z, su valor se puede calcular con la aproximación que se quiera tomando un número suficientemente grande de términos.
Ahora bien, en la mayoría de los problemas matemáticos que tienen aplicaciones a la ciencia, la "respuesta" es indicada como la solución de una ecuación diferencial (o sistema de tales ecuaciones), y esta solución sólo rara vez se obtiene como una expresión finita de funciones matemáticas reunidas en tablas (por ejemplo logaritmos, funciones trigonométricas, funciones elípticas, etc.). En tales problemas es necesario hacer dos cosas: demostrar que la serie converge; si así ocurre, calcular su valor numérico con la aproximación requerido.
Si la serie no converge es de ordinario un signo de que el problema ha sido incorrectamente planteado o erróneamente resuelto. Las numerosas funciones que se presentan en Matemática pura son tratadas en la misma forma, lo mismo que tengan o no aplicaciones científicas, y, finalmente se ha elaborado una teoría general de la convergencia para explicar vastos campos de estas cuestiones, de modo que el examen individual de la serie particular muchas veces se refiere a investigaciones de mayor alcance ya realizadas.
Finalmente, todo ello (trátese de Matemática pura o aplicada) se extiende a series de potencias de 2, 3, 4... variables en lugar de la única variable z, como en el caso citado; por ejemplo

$$a + b_0 + b_1w + c_0z^2 + c_1zw + c_2w_2$$

Puede decirse que sin la teoría de las series de potencias la mayor parte de la física matemática (incluyendo gran parte de la astronomía y de la astrofísica), tal como la conocemos hoy, no existiría.

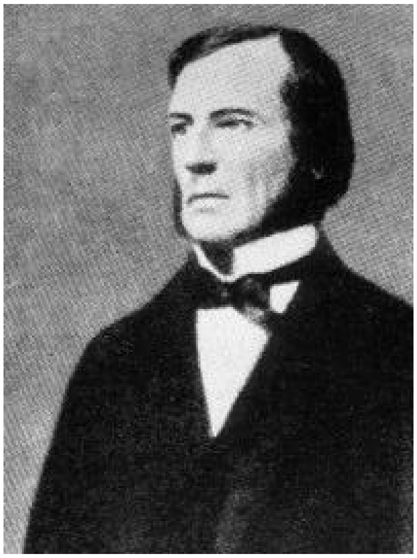
Las dificultades que surgen con los conceptos de límite, continuidad y convergencia impulsaron a Weierstrass a la creación de su teoría de números irracionales.
Supongamos que extraemos la raíz cuadrada de 2, como se hace corrientemente, llevando el cálculo hasta un gran número de cifras decimales. Tendremos como aproximaciones sucesivas de la raíz cuadrada pedida la sucesión de números

1, 1.4, 1.41, 1.412,...

Con suficiente paciencia, procediendo mediante pasos bien definidos según la regla usual, podemos, si es necesario, mostrar el primer millar, o el primer millón, de los números racionales 1, 1.4,... que constituyen esta sucesión de aproximaciones. Examinando esta sucesión vemos que, cuando llegamos suficientemente lejos, tenemos un número racional perfectamente definido que contiene tantas cifras decimales como nos plazca (por ejemplo 1000, y que éste número racional difiere de cualquiera de los números racionales *sucesivos* de la sucesión en un número (decimal), tal como .000... 000..., en el cual se presenta un número correspondientemente grande de ceros antes de que aparezca otro dígito (1, 2,... 6 ó 9).
Esto ilustra lo que se quiere significar por una *sucesión convergente* de números: los racionales 1, 1.4,... que constituyen la sucesión nos dan aproximaciones más exactas al "número irracional" que llamamos la raíz cuadrada de 2, y que concebimos como *definido* por la *sucesión convergente de números racionales*, admitiéndose esta definición en el sentido de que se ha indicado un método (el usual) de calcular *cualquier término particular de la sucesión en un número finito de etapas.*
Aunque es imposible, en realidad, mostrar la sucesión total, no deteniéndose en cualquier número finito de términos, consideramos, de todos modos, el *proceso* para construir cualquier número de la sucesión como una concepción suficientemente clara de la sucesión total con un objeto único definido, acerca del cual podemos razonar. Al hacer esto disponemos de un método para usar la raíz cuadrada de 2, y de modo análogo para cualquier número irracional, en el Análisis matemático.
Según se ha dicho, es imposible hacer esto de un modo preciso en un libro como el presente, pero, hasta en este caso, un cuidadoso examen permite descubrir alguna de las objeciones lógicas que pueden hacerse a la explicación precedente, objeciones que inspiraron a Kronecker y a otros autores para atacar la definición de los irracionales de Weierstrass por medio de sucesiones convergentes.
Estuvieran o no en lo cierto, Weierstrass y su escuela consiguieron resultados de la teoría. Los resultados más útiles logrados no han sido discutidos, al menos sobre la base de su gran utilidad en el Análisis matemático y sus aplicaciones, por ningún juez competente. Esto no significa que no puedan hacerse objeciones, y simplemente llamar la atención sobre el hecho de que en Matemática, como cualquier otra cosa, no debe confundirse esta tierra con el Reino de los Cielos, que la perfección es una quimera, y que, según las palabras de Crelle, sólo podemos esperar acercarnos cada vez más a la verdad matemática siempre que esto pueda ser, precisamente como en la teoría de Weierstrass de las sucesiones convergentes de números racionales que definen los irracionales.
Después de todo ¿por qué los matemáticos, que son seres humanos como el resto de los mortales, siempre serán tan pedantemente exactos y tan inhumanamente perfectos? Weierstrass dijo: "Cierto es que un matemático que no tiene también algo de poeta, jamás será un perfecto matemático". He aquí la respuesta: un matemático perfecto, por el mismo hecho de su perfección poética, será una imposibilidad matemática.

Capítulo Vigesimotercero
INDEPENDENCIA COMPLETA

BOOLE



La Matemática pura fue descubierta por Boole en una obra que tituló "Las Leyes del Pensamiento.

Bertrand Russell

¡Oh!, nosotros no leemos nada de lo que hacen los matemáticos ingleses". Esta observación característica de los países del continente fue la respuesta de un distinguido matemático europeo cuando fue interrogado acerca que si había leído una obra reciente de uno de los principales matemáticos ingleses. El "nosotros" denuncia esa franca superioridad de los matemáticos continentales en general.

Esta no es la clase de anécdotas que los matemáticos gustan de contar de sí mismos, pero como ilustra admirablemente esa característica de los matemáticos ingleses, la originalidad insular, que ha sido la principal distinción de la escuela británica, constituye la introducción ideal a la vida y obra de uno de los matemáticos ingleses de más originalidad insular que Inglaterra ha producido, George Boole. El hecho es que los matemáticos británicos muchas veces han seguido serenamente su camino, haciendo lo que les interesaba personalmente, como si estuvieran entregados a una diversión, con un perfecto desprecia para lo que los demás consideran como de suprema importancia, afirmándolo así al mundo. Algunas veces, como en la prolongada idolatría, por los métodos de Newton, la indiferencia por las cuestiones del momento ha costado mucho a la escuela inglesa, pero a la larga, esa actitud de dicha escuela ha añadido más nuevos campos a la Matemática que si hubiera sido una servil imitación de los maestros continentales. La teoría de invariantes es un caso; la teoría del campo electrodinámico de Maxwell es otro.

Aunque la escuela inglesa haya participado en la ulterior elaboración de trabajos iniciados en otros países, su mayor contribución al progreso de la Matemática se ha basado en la originalidad. La obra de Boole es un notable ejemplo de esto. Al ser expuesta pasó inadvertida, salvo para algunos pocos de los compatriotas no ortodoxos de Boole, quienes reconocieron en ella el germen de algo de supremo interés para toda la Matemática. Actualmente el desarrollo natural de ese germen ha venido a constituir rápidamente una de los principales capítulos de la Matemática pura, que numerosos investigadores de todos los países extienden a todos los campos de la matemática para consolidar nuestras conquistas sobre firmes fundamentos. Como Bertrand

Russell hizo notar hace algunos años, la Matemática pura fue *descubierta* por George Boole en su obra de *The Laws of Thought*, publicada en 1854. Podrá ser una exageración, pero es un indicio de la importancia que han adquirido hoy la lógica matemática y sus ramificaciones. Otros antes que Boole, especialmente Leibniz y De Morgan, soñaron añadir la lógica al dominio del Álgebra; Boole lo hizo.

George Boole, como algunos de los otros precursores de la Matemática, procedía de los estratos económicos más bajos de la sociedad. Su destino aún era más duro. Nació el 2 de noviembre de 1815 en Lincoln, Inglaterra, siendo hijo de un modesto tendero. Si damos crédito a la explicación dada por los autores ingleses de aquellos días, el año 1815, el año de Waterloo, ser hijo de un comerciante modesto significaba en aquel tiempo quedar condenado al ostracismo.

Toda la clase social a la que el padre de Boole pertenecía era tratada con un desprecio aún mayor que el reservado para las fregonas y para los lacayos. Las "clases inferiores" en cuyo nivel Boole había nacido, simplemente no existían a los ojos de "las clases superiores", incluyendo entre éstas a los comerciantes más prósperos y a los prestamistas. Se consideraba como indiscutible que un niño del nivel social de Boole apenas podía aprender otra cosa que el catecismo, para evitar así que transgrediera los límites estrictos de la obediencia impuesta por la vanidad humana.

Decir que los primeros esfuerzos de Boole para educarse en un nivel superior a aquel en que "Dios había gustado colocarle", eran una sencilla imitación del Purgatorio no revela toda la verdad. Por un acto de la Divina Providencia, el gran espíritu de Boole había sido designado a la clase más modesta, y debía quedar en ella sin atender a sus propios juicios ambiciosos. Los americanos podrían recordar que Abraham Lincoln, tan sólo seis años mayor que Boole, luchó aproximadamente en la misma época. Pero Lincoln no fue despreciado, sino alentado.

Las escuelas donde recibían la enseñanza los que habían de ser grandes caballeros, donde realizaban su aprendizaje para desempeñar los papeles directivos en los sistemas del trabajo a destajo o en las minas de carbón que comenzaban a ser explotadas, no eran apropiadas para criaturas como George Boole. No; su *National School* estaba dirigido principalmente hacia el fin de mantener a los pobres en el lugar que les correspondía.

Un aprendizaje superficial de latín, y todavía más superficial de griego, era uno de los místicos signos de nobleza en aquellos incomprensibles días de la revolución industrial. Aunque pocos eran los muchachos que aprendían el latín necesario para poder traducir, su supuesto conocimiento de su gramática constituía una de las características de la nobleza, y su sintaxis, aprendida de memoria, era considerada como la disciplina mental de mayor utilidad para preparar a los propietarios, y para que éstos conservaran la propiedad.

Como es natural, no se enseñaba latín en la escuela a la que Boole podía asistir. Incurriendo en el error señalado acerca de en qué consistía la superioridad de las clases acomodadas para gobernar a la que estaba por debajo en la escala de la riqueza, Boole decidió aprender latín y griego para poder escalar una posición social. Esta fue una equivocación de Boole. El latín, y el griego nada tenían que ver con la causa de sus dificultades. Aprendió latín por sí mismo, con el aliento que su pobre padre le prestaba. Aunque el modesto comerciante sabía que él ya no podría escapar, quería abrir el camino para su hijo. El padre de Boole no sabía latín. El muchacho recurrió a otro comerciante, un librero amigo de su padre. Este buen hombre sólo pudo dar al muchacho un breve curso de gramática elemental. Después de ello, Boole tuvo que seguir sus estudios por sí solo. Quien haya visto a un buen maestro luchando por enseñar latín a un niño normal de ocho años, se dará, cuenta de lo que Boole sin tutela alguna quería realizar. Teniendo doce años aprendió el latín suficiente para traducir en versos ingleses una oda de Horacio. Su padre lleno de orgullo, aunque no comprendiera los méritos técnicos de la traducción, consiguió que se imprimiera en un diario local. Esto dio lugar a una reyerta entre los eruditos, de los cuales unos elogiaban a Boole y otros le humillaban.

Un maestro de lenguas clásicas negó que un muchacho de 12 años pudiera haber realizado la traducción. Sin embargo, los muchachos de 12 años saben muchas más cosas que lo que sus olvidadizos padres suponen. Por lo que se refiere a la parte técnica se señaló que presentaba grandes defectos. Boole estaba humillado, y resolvió corregir las deficiencias de su autoinstrucción. También aprendió por sí mismo el griego. Decidido a ser algo, o a no ser nada, empleó los dos años siguientes en estudiar el latín y el griego sin ayuda alguna. El efecto de este esfuerzo se aprecia fácilmente en la altisonancia y en los marcados latinismos que se observan en la prosa de Boole.

Boole recibió su primera instrucción matemática de su padre, quien gracias a sus esfuerzos privados había aprendido mucho más de lo que le enseñaron en la escuela. El padre intentó también interesarle en otra de sus habilidades, la de construir instrumentos ópticos, pero Boole, inclinándose ante sus ambiciones, seguía creyendo que los clásicos eran la clave para lograr puestos dominantes. Después de terminar sus estudios escolares comunes siguió un curso comercial. Esta vez su diagnóstico era más exacto, pero poca ayuda habrían de prestarle esos desvelos. Teniendo 16 años se vio ante la necesidad de contribuir inmediatamente al mantenimiento de sus padres enfermos. La enseñanza escolar le ofrecía la oportunidad más directa de obtener un jornal, en los días de Boole los "conserjes", según se llamaba a los maestros ayudantes, no recibían salarios, sino jornales. Entre salarios y jornales existe algo más que una diferencia monetaria. Podía haber sido en esta época cuando el inmortal Squeers, en el *Nicholas Nickleby* de Dickens, realizase su importante pero inapreciada contribución a la pedagogía moderna en Dotheboys Hall con su brillante anticipación del método “proyecto". El joven Boole podía haber sido uno de los conserjes de Squeers; enseñó en dos escuelas.

Boole pasó cuatro años, más o menos felices, enseñando en estas escuelas elementales. Las frías noches, al menos, cuando los discípulos se retiraban a descansar, podrían ser dedicadas a su labor. Seguía aún un camino equivocado. Su tercer diagnóstico acerca de la incapacidad social fue similar al segundo, pero suponía un considerable progreso con respecto a los dos primeros. Careciendo de dinero prácticamente todo lo que el joven ganaba apenas servía para subvenir a las necesidades más sencillas de sus padres, Boole pasó revista a las diferentes profesiones. En aquel tiempo el ejército se hallaba fuera de sus medios. La abogacía suponía requisitos financieros y de educación que no tenía probabilidad de satisfacer. La enseñanza en la esfera donde él se movía no era una profesión de reputación. ¿Qué quedaba? Tan sólo la iglesia, y Boole resolvió ser sacerdote.

A pesar de todo lo que se haya dicho en favor y en contra de Dios, debe admitirse, hasta por sus más severos críticos, que tiene cierto sentido del humor. Dándose cuenta de que era ridículo que Boole fuera sacerdote, torció hábilmente las ambiciones del joven hacia direcciones menos absurdas. La máxima pobreza de los padres de Boole dio lugar a que éstos solicitaran de su hijo que abandonara todos sus pensamientos de ser una eminencia eclesiástica. Pero sus cuatro años de preparación privada (y rígida privación) para la carrera que planeaba, no se perdieron totalmente; aprendió el francés, el alemán y el italiano, que le iban a ser indispensables en su verdadero camino.

Al fin se encontró a sí mismo. La primera instrucción que le diera su padre, produjo ahora fruto. Teniendo 20 años, Boole abrió una escuela para preparar alumnos y enseñarles Matemática como debía ser enseñada. Su interés despertó. Pronto los ordinarios y execrables manuales que le producían admiración, provocarían su desprecio. ¿Sería esto, por ventura, la Matemática? Increíble. ¿Que dirían los grandes maestros de la Matemática? Igual que Abel y Galois, Boole se dirigió directamente a las grandes figuras. Debemos recordar que su conocimiento matemático no iba más allá de los rudimentos. Para formarnos una idea de su capacidad mental, podemos imaginar a este estudiante solitario de veinte años leyendo, sin necesidad de ayuda, la *Mécanique celeste* de Laplace, una de las obras maestras más difíciles de asimilar para un estudioso consciente, pues el razonamiento matemático está lleno de lagunas y de declaraciones enigmáticas, como la de "es fácil ver". Recordaremos, además, que Boole hizo un completo y comprensivo estudio de la obra excesivamente abstracta *Mécanique analytique* de Lagrange, donde no hay una sola figura desde el principio al fin para aclarar el análisis. Sin embargo, Boole, por sí mismo, siguió su camino y vio lo que debía hacer. También en su primera contribución a la Matemática sus esfuerzos carecieron de guía. Se trataba de un trabajo sobre el cálculo de variaciones.

Otra conquista que Boole realizó en todo este solitario estudio merece párrafo aparte. Descubrió los invariantes. La significación de este gran descubrimiento, que Cayley y Sylvester habrían de desarrollar en gran escala, ha sido suficientemente explicado; aquí repetiremos que sin la teoría matemática de la invariabilidad (que se deriva de los primer trabajos algebraicos), la teoría de la relatividad hubiera sido imposible Así, en el umbral de su carrera científica, Boole se dio cuenta del terreno que pisaba, cosa que Lagrange no pudo ver, y encontró lo que iba a ser una gema de primera agua, Boole vio lo que para otros había pasado inadvertido gracias a su fuerte sensibilidad para la simetría y la belleza de las relaciones algebraicas, cuando, como es natural, son simétricas y bellas, cosa que no siempre ocurre. Otros podían haber creído que se trataba de una cosa sin importancia, pero Boole reconoció que era algo de un orden superior.

Las oportunidades para las publicaciones matemáticas en los días de Boole no eran fáciles, a no ser que el autor fuera miembro de alguna sociedad docta, con una revista a su disposición. Por fortuna para Boole *The Cambridge Mathematical Journal*, bajo la capaz dirección del matemático escocés D.F. Gregory, había sido fundado en 1837. Boole envió su obra. Su originalidad y estilo impresionaron favorablemente a Gregory, y una correspondencia matemática cordial inició la amistad que iba a durar toda la vida de Boole.

Nos llevaría demasiado lejos exponer aquí la gran contribución que la escuela inglesa estaba haciendo en aquella época para la comprensión del Álgebra como Álgebra, es decir como el desarrollo abstracto de las consecuencias de una serie de postulados, sin una interpretación o aplicación obligada a “números" o a cualquier otra cosa, pero puede mencionarse que la concepción moderna del Álgebra comenzó con los “reformadores" británicos Peacock, Herschell, De Morgan, Babbage, Gregory y Boole. Lo que era una novedad algo herética cuando Peacock publicó su tratado de Álgebra en 1830, es actualmente un lugar común en cualquier manual seriamente escrito. De una vez para todas Peacock destruyó la superstición de que x, y,... en relaciones como

$$x + y = y + x,$$
$$xy = yx$$
$$x(y + z) = xy + xz$$

y así sucesivamente, tal como las encontramos en Álgebra elemental, "representan necesariamente números". No es así, y esto es una de las cosas más esenciales del Álgebra, y la fuente de su importancia en las aplicaciones. Las letras x, y, z,... son simplemente símbolos arbitrarios que se combinan de acuerdo con ciertas operaciones, una de las cuales se simboliza por + y otra por $\times$ (o simplemente como xy en lugar de $x \times y$), de acuerdo con postulados establecidos al comienzo, como en los casos

$$x + y = y + x$$

antes citados.

Sin este conocimiento de que el Álgebra no es por sí misma otra cosa, que un sistema abstracto, esta ciencia todavía estaría en el fango aritmético del siglo XVIII, incapaz de haber asumido las variantes modernas y extraordinariamente útiles bajo la dirección de Hamilton. Aquí tan sólo haremos notar que esta renovación del Álgebra dio a Boole su primera oportunidad para hacer una obra sobresaliente, apreciada por sus contemporáneos. Por propia iniciativa separó los *símbolos* de las operaciones matemáticas de aquéllas cosas sobre las cuales actúan, y procedió a investigar esas operaciones por su propia cuenta. ¿Cómo se combinan? ¿Se sujetan a algún tipo de Álgebra simbólica? Encontró que así era. Su obra en esta dirección es extraordinariamente interesante, pero pasa a un segundo plano ante otra que es más propia de él: la creación de un sistema sencillo de lógica simbólica o matemática.

Como introducción a esta espléndida invención de Boole debemos hacer una ligera digresión y recordar una famosa reyerta de la primera mitad del siglo XIX, muy ruidosa en su día pero que ahora ha sido casi olvidada, salvo por los historiadores de filosofía patológica. Hace poco hemos mencionado a Hamilton. En esta época existieron dos Hamilton de pública fama, uno el matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), el otro el filósofo escocés Sir William Hamilton (1788-1856). Los matemáticos suelen referirse al filósofo como *el otro* Hamilton. Después de una carrera no llena de triunfos como abogado y candidato a cargos universitarios oficiales, el elocuente filósofo escocés fue finalmente profesor de Lógica y Metafísica en la Universidad de Edimburgo. El matemático Hamilton, como hemos dicho, fue uno de los matemáticos más originales del siglo XIX. Quizá fuera esto una desgracia para el otro Hamilton, que poco sabía de Matemática, pero algunos lectores confunden muchas veces a los dos famosos Sir William.

Ahora bien, si existe algo más obtuso desde el punto de vista matemático que un tozudo metafísico escocés, habrá que buscarlo probablemente en un matemáticamente estúpido metafísico alemán. Para superar el perfecto absurdo de alguna de las cosas que el escocés Hamilton dijo acerca de la Matemática, habría que recordar lo que Hegel dijo acerca de la Astronomía o Lotze acerca de la Geometría no euclidiana. Cualquier lector desocupado puede convencerse por su cuenta. Fue una desgracia para el metafísico Hamilton que su pereza no le permitiera ir más allá de los conocimientos superficiales de la Matemática elemental que recibiera en la escuela, pero la "omnisciencia era su punto débil", y cuando comenzaba a pronunciar conferencias y a escribir sobre filosofía, se creía obligado a decir al mundo cuán inútil era la Matemática.

El ataque de Hamilton a la Matemática es probablemente el más famoso de los muchos salvajes ataques que la Matemática ha sufrido. Hace menos de 10 años, profusos párrafos de la diatriba de Hamilton fueron vigorosamente aplaudidos cuando un entusiasta pedagogo se refirió a ellos en una reunión largamente esperada de nuestra *National Educational Association.* En lugar de aplaudir, los oyentes hubieran obtenido mejor provecho de la exhibición si se hubieran negado a tragar buena parte de la filosofía de Hamilton que aderezaba, como salsa obligatoria, el jugoso plato de la sardina matemática. Recordaremos algunas de sus más violentas perdigonadas, y dejaremos al lector en libertad de que haga de ellas el uso que le plazca.

"Las Matemáticas (Hamilton siempre decía "Matemáticas" en plural no en singular como es costumbre actualmente) congelan y agostan la mente". "Un estudio excesivo de las Matemáticas incapacita absolutamente a la mente para aquellos esfuerzos intelectuales que la filosofía y la

vida requieren". "Las Matemáticas no puede conducir, de modo alguno, a hábitos lógicos". "En Matemáticas la estupidez se considera como talento, y el talento se degrada hasta la incapacidad". "Las Matemáticas pueden deformar, pero jamás rectificar la mente".
Esto es únicamente una muestra de sus perdigonadas, pero carecemos de espacio para sus balas de cañón. Todo el ataque es muy impresionante para un hombre que conozca menos Matemática que la que sabe un niño inteligente de diez años. Una de sus balas merece especial mención, pues alude a una figura de gran importancia matemática, De Morgan (1806-1871), uno de los más expertos polimistas que han vivido, un matemático de vigorosa independencia, un gran lógico que preparó el camino a Boole, enemigo implacable de todos los charlatanes y farsantes, y, finalmente, padre del famoso novelista (*Alice for Short*, etc.). Hamilton dice: "Esto [una razón absolutamente falta de sentido que no necesitamos repetir] es lo que Mr. De Morgan entre otros matemáticos afirma con frecuencia que es cierto. Si Mr. De Morgan tuviera menos de matemático, hubiera podido ser más filósofo; y puede recordarse, que las Matemáticas y los tragos de aguardiente dañan especialmente, a largo plazo". Aunque la esotérica puntuación es oscura, la significación es bastante clara. Pero el caso es que De Morgan no era dado a la bebida.
De Morgan, que había obtenido fama por algunos de sus estudios de lógica, se permitió en un momento de distracción, ser atrapado en una controversia con Hamilton acerca del famoso principio de éste, referente a "la cuantificación del predicado". No necesitamos explicar lo que es este misterio, mejor dicho lo que era, pues hoy está bien muerto. De Morgan había hecho una excelente contribución al silogismo; Hamilton pensó ver las brillantes ideas de De Morgan en su propio cerebro, y el iracundo filósofo-jurista escocés acusó públicamente a De Morgan de plagio. La lucha comenzó, pero por parte de De Morgan, al menos, fue tomada en broma. De Morgan nunca perdía su equilibrio, pero Hamilton jamás supo mantenerlo.
Si esta reyerta hubiera sido tan sólo una de las innumerables querellas acerca de la prioridad que altera la historia científica, no merecerla siquiera ser mencionada. Su importancia histórica estriba en que Boole era por entonces (1848) un buen amigo y admirador de De Morgan. Boole enseñaba en una escuela, pero conocía personalmente o por correspondencia a muchos de los principales matemáticos ingleses. En aquélla ocasión corrió en ayuda de su amigo, no porque el astuto de De Morgan necesitara auxilio, sino porque sabía que De Morgan tenía razón y que Hamilton estaba equivocado. Boole publicó un pequeño volumen, *El análisis matemático de la lógica*, su primera contribución pública al vasto tema que su obra inaugura, y que iba a proporcionarles fama perdurable por la audacia y agudeza de su visión. El folleto, apenas es otra cosa que esto, excitó la admiración de De Morgan. Aquí había un maestro, y De Morgan se apresuró a reconocerlo así. El librito era tan sólo la promesa de mayores hazañas, que tendrían lugar seis años más tarde, pero Boole había abierto el camino.
Mientras tanto no estaba muy decidido a seguir el consejo de los amigos matemáticos, quienes le proponían marchara a Cambridge para estudiar la Matemática ortodoxa, pues Boole continuaba con sus penosos trabajos de la docencia elemental sin una queja, debido a que sus padres dependían ahora completamente de sus ingresos. Al fin tuvo una oportunidad para manifestar su notable capacidad como investigador y maestro. Fue nombrado profesor de Matemática en el Queen's College, recientemente fundado en la ciudad de Cork, Irlanda. Esto ocurría en el año 1849.
No hay ni qué decir que el hombre brillante, que sólo había conocido la pobreza y el duro trabajo durante toda su vida, hizo un excelente uso de su relativa libertad de pesadumbres financieras. Sus deberes, aunque pesados, le parecían ligeros en comparación con la penosa enseñanza elemental a la que estaba acostumbrado. Su obra matemática es extraordinariamente variada, pero su principal esfuerzo se dirigió a dar forma a su obra maestra. En 1854, la publicó bajo el título

de *Una investigación de las leyes del pensamiento, sobre las cuales se fundan las teorías matemáticas de la lógica y de las probabilidades.* Boole tenía 39 años cuando esta obra apareció. Es algo desusado para un matemático tan joven realizar un trabajo de tan profunda originalidad, pero el fenómeno se explica cuando se recuerda el largo y tortuoso camino que Boole se vio obligado a seguir antes de poder contemplar su meta (compárense las carreras de Boole y de Weierstrass).

Algunos párrafos darán cierta idea del estilo de Boole y del objeto de su obra.

"El objeto del siguiente tratado es investigar las leyes fundamentales de esas operaciones de la mente en cuya virtud se realiza el razonamiento; expresarías en el lenguaje de un Cálculo, y sobre ese fundamento establecer la ciencia de la lógica y construir su método; hacer de ese método la base de un método general para la aplicación de la teoría matemática de las probabilidades, y, finalmente, recoger de los diversos elementos de verdad que surgen en el curso de estas pesquisas algunas probables informaciones referentes a la naturaleza y constitución de la mente humana..."

"¿Estaremos errados al considerar esto como la verdadera ciencia de la lógica, la cual, estableciendo ciertas leyes elementales, confirmadas con el testimonio de la mente, nos permite deducir, por un proceso uniforme, toda la cadena de sus consecuencias secundarias, y proporciona, para sus aplicaciones prácticas, métodos de generalidad perfecta?..."

"Existen, en efecto, ciertos principios generales fundados en la naturaleza del lenguaje en virtud de los cuales se establece el uso de símbolos, que no son otra cosa que elementos de lenguaje científico. Estos elementos son, en cierto grado, arbitrarios. Su interpretación es puramente convencional, y estará permitido emplearlos en el sentido que nos plazca. Pero este permiso está limitado por dos condiciones indispensables, primero, que no nos separemos del sentido convencionalmente establecido en el mismo proceso del razonamiento; segundo, que las leyes que rijan la conducción el proceso se funden exclusivamente sobre el sentido o significación anteriormente fijado de los símbolos empleados. Según estos principios, cualquier acuerdo que pueda ser establecido entre las leyes de los símbolos de la lógica y los del Álgebra puede manifestarse en un acuerdo de los procesos. Los dos campos de la interpretación permanecen aparte e independientes, cada uno de ellos a sus propias leyes y condiciones".

"Ahora bien, las investigaciones descritas en las siguientes páginas muestran la lógica, en su aspecto práctico, como un sistema de procesos realizados con la ayuda de símbolos que tienen una interpretación definida, y que están sometidos a leyes fundadas tan sólo sobre esa interpretación. Pero al mismo tiempo muestran que esas leyes son idénticas en forma a las leyes de los símbolos generales del Álgebra, con esta única adición, la de que los símbolos de la lógica están además sometidos a una ley especial [x^2 - x en Álgebra de lógica, que puede ser interpretada, entre otras formas, como "la clase de todas aquellas cosas comunes a una clase *x*, y que en sí misma es simplemente la clase *x*"] a la cual los símbolos de cantidad, como tal, no están sujetos". (Es decir, en Álgebra común no es cierto que toda *x* sea igual a su cuadrado mientras en el Álgebra de lógica de Boole, esto es cierto).

Este programa es desenvuelto detalladamente en el libro, Boole reduce la lógica a un tipo extraordinariamente fácil y simple de Álgebra. El "razonamiento" sobre el material apropiado es en esta Álgebra una cuestión de manipulaciones elementales de fórmulas mucho más sencillas que aquellas que son tratadas en el segundo año del Álgebra escolar. Así, la lógica misma fue llevada bajo el imperio de la Matemática.

Desde los primitivos trabajos de Boole su gran invención ha sido modificada, mejorada, generalizada y extendida en muchas direcciones. En la actualidad la lógica simbólica o matemática es indispensable en cualquier intento serio para comprender la naturaleza de la Matemática *y* el estado de los fundamentos sobre los que reposa la total y colosal superestructura.

La complicación y delicadeza de las dificultades, exploradas por el razonamiento simbólico serían, por así decir, un desafío a la razón humana si tan sólo se dispusiera de los métodos anteriores a Boole de la argumentación lógica verbal. La audaz originalidad de toda la obra de Boole no necesita ser señalada.

Desde 1899, cuando Hilbert publicó su obra clásica sobre los fundamentos de la Geometría, se ha prestado mucha atención a la axiomatización de las diversas ramas de la Matemática. Este movimiento se remonta a Euclides, pero por alguna extraña razón, posiblemente debido a que las técnicas inventadas por Descartes, Newton, Leibniz, Euler, Gauss, etc. dan a la Matemática facilidades para desarrollar sus temas libremente y sin estar sometidos a la crítica, el método euclidiano fue durante mucho tiempo descuidado, salvo en la Geometría. Ya hemos visto que la escuela inglesa aplicó el método al Álgebra en la primera mitad del siglo XIX. Sus buenos resultados parece que no hicieron gran impresión sobre la obra de sus contemporáneos e inmediatos sucesores, y únicamente después de los trabajos de Hilbert el método por postulados fue aceptado como la forma más clara y más rigurosa, de abordar cualquier disciplina Matemática.

Actualmente esta tendencia a la abstracción, en la que los símbolos y reglas para tratar cualquier tema particular son desprovistos de toda significación, y discutidos desde un punto de vista puramente formal, constituye la moda, descuidándose las aplicaciones (prácticas o matemáticas), que según algunos dicen constituyen la verdadera justificación humana de cualquier actividad científica. De todos modos, el método abstracto nos da una visión que no nos proporcionan los métodos menos rigurosos, y así puede verse más fácilmente la gran sencillez del Álgebra de la lógica sugerida por Boole.

En consecuencia, enunciaremos los postulados del Álgebra de Boole (el Álgebra de lógica), y, al hacerlo así veremos que puede darse, en efecto, una interpretación consecuente con la lógica clásica. La siguiente serie de postulados ha sido tomada de un trabajo de E. V. Huntington, publicado en *Transactions of the American Mathematical Society* (vol. 35, 1933, págs. 274-304). Todo el trabajo es fácilmente comprensible para quien haya estudiado Álgebra durante una semana, y la revista se encuentra en muchas bibliotecas importantes. Como Huntington señala, esta primera serie de postulados que transcribimos no es tan elegante como algunos de sus otros postulados. Pero como su interpretación en función de la inclusión de clase y en la lógica formal es más fácil que en los otros casos, preferiremos dicha serie.

La serie de postulados se expresa en función de K, $+$, $\times$, donde K es una clase de elementos no definidos $a, b, c,...$ (completamente arbitrarios, sin tener asignadas una significación o propiedades más allá de las admitidas en los postulados), y $a + b$ y $a \times b$ (que también se escribe ab) son los resultados de dos operaciones binarias indefinidas, $+$, $\times$ ("binarias", debido a que tanto $+$ como $\times$ actúan sobre dos elementos de K). Existen diez postulados, Ia-VI:

- **I a**. *Si a y b están en la clase K, entonces $a + b$ están en la clase K.*
- **I b**. *Si a y b están en la clase K, entonces ab está en la clase K.*
- **II a**. *Existe un elemento Z tal que $a + Z = a$ para todo elemento a.*
- **II b**. *Existe un elemento U tal que $aU = a$ para todo elemento a.*
- **III a**. $a + b = b + a$.
- **III b**. $ab = ba$.
- **IV a**. $a + bc = (a + b) (a + c)$.
- **IV b**. $a(b + e) = ab + ac$.
- **V**. *Para todo elemento a existe un elemento a' tal que $a + a' = U$ y $aa' = Z$.*

- **VI**. *Existen al menos dos elementos diferentes en la clase K.*

Fácilmente se apreciará que estos postulados se satisfacen por la siguiente interpretación: a, *b, c,...* son clases; *a + b* es la clase de todas aquellas cosas que están al menos en una de las clases *a, b*; *ab* es la clase de todas aquellas cosas que están en ambas clases *a, b; Z* es la "clase nula", la clase que no tiene números; U es la "clase universal", la clase que contiene *todas* las cosas en *todas* las clases sin discusión. El postulado **V** afirma, pues, que dada cualquier clase *a*, existe una clase *a*, compuesta de todas aquellas cosas que no están en *a*. Obsérvese que **VI** implica que *U, Z* no son la misma clase.

En esta sencilla y clara serie de enunciados se observa que la totalidad de la lógica clásica puede ser construida simbólicamente por medio de la fácil álgebra engendrada por los postulados. De estos postulados se desarrolla una teoría de lo que puede ser llamada "ecuaciones lógicas"; los problemas de lógica son trasladados a tales ecuaciones, que entonces son "resueltas", por los recursos del Álgebra. La solución es entonces reinterpretada en los términos de los datos lógicos, obteniéndose la solución del problema original. Terminaremos esta descripción con el equivalente simbólico de "inclusión", interpretable también cuando las *proposiciones* más que las clases son los elementos de *K* como "implicación".

"La relación a < b (léase, *a está incluida en b*), se define por cualquiera de las siguientes ecuaciones

$$a + b = b, ab = a, a' + b = U, ab' = Z."$$

Para ver que estas ecuaciones son razonables, consideremos por ejemplo la segunda ab = a. Esta ecuación afirma que si *a* está incluida en *b*, entonces todo lo que esté en *a y b* es la totalidad de *a*. De los postulados enunciados pueden ser *demostrados* los siguientes teoremas sobre inclusión (con millares de otros más complicados si se desea). Los casos seleccionados están de acuerdo con nuestra concepción intuitiva de lo que significa "inclusión".

1. *a < a.*
2. *Si a < b y b < c, entonces a < c.*
3. *Si a < b y b < a, entonces a = b.*
4. *Z < a (donde Z es el elemento en* IIa, *demuestra ser el único elemento que satisface* IIa*).*
5. *a < U (donde U es el elemento en* IIb, *igualmente único).*
6. *a < a + b; y si a < y y b < y, entonces a + b < y.*
7. *ab < a; y si x < a y x < b, entonces x < ab.*
8. *Si x < a y x < a, entonces x = Z; y si a < y y a' < y, entonces y = U.*
9. *Si a < b' es falso, entonces existe al menos un elemento x, diferente de Z, tal que x < a y x < b.*

Puede ser de interés observar que "<" en aritmética y análisis este signo significa "menor que". Obsérvese que si *a, b, c,...* son números reales, y *Z* denota cero, entonces (2) se satisface por esta interpretación del signo " < ", y similarmente, para (4), siempre que a sea positivo; pero (1) no se satisface ni es la segunda parte de (6), es decir 5 < 10, 7 < 10, pero 5 + 7 < 10 es falso.

El enorme poder y la extraordinaria facilidad del método se aprecian fácilmente al aplicarlo a cualquier investigación sobre lógica simbólica. Pero, como fue subrayado, la importancia de este "razonamiento simbólico" está en su aplicabilidad a las sutiles cuestiones que se refieren al fundamento de toda la Matemática, las cuales, si no fuera por este método preciso de fijar la significación de las "palabras" de otros "símbolos" de una vez para todas, serían probablemente inabordables para los, mortales vulgares.

Como ocurre con casi todas las novedades, la lógica simbólica fue despreciada durante muchos años después de su invención. Todavía en 1910 encontramos eminentes matemáticos que la consideran despectivamente como una curiosidad "filosófica" sin significación matemática. El trabajo de Whitehead y Russell en sus *Principia Mathematica* (1910-1913) fue el primero que convenció a numerosos matemáticas profesionales de que la lógica simbólica era digna de su atención. Podemos recordar a un firme enemigo de la lógica simbólica, a Cantor, cuya obra sobre el infinito será mencionada en el último capítulo. Por una de esas ironías de la historia de la Matemática que la hacen tan divertida para los lectores, la lógica simbólica iba a desempeñar un importante papel en la crítica drástica de la obra de Cantor, causante de que su autor perdiera la fe en sí mismo y en su teoría.

Boole no sobrevivió mucho a su obra maestra. El año después de su publicación, manteniendo aún subconscientemente que la respetabilidad social podría ser lograda, por el conocimiento del griego, se casó con Mary Everest, sobrina del profesor de griego en el Queen's College. Su mujer fue su devota discípula. Después de la muerte de su marido, Mary Boole aplicó algunas de las ideas aprendidas de él para racionalizar y humanizar la educación de sus hijos. En un folleto, la *Psicología de Boole*, Mary Boole recuerda una interesante especulación de dicho matemático, que los lectores de las leyes del pensamiento reconocerán que se halla implícita, aunque no expresada, en algunas parte de su obra. Boole contó a su mujer que en el año 1832, cuando tenía diecisiete, surgió como un relámpago, mientras paseaba por un campo, la idea de que, aparte de los datos que se obtienen por observación directa, el hombre logra sus conocimientos de alguna fuente indefinida e invisible que Mary Boole llama "el inconsciente". Será interesante recordar (véase más delante) que Poincaré expresa una opinión análoga refiriéndose a la génesis de las "inspiraciones" matemáticas en la "mente subconsciente". De todos modos, Boole estuvo altamente inspirado cuando escribió *Las leyes del pensamiento.*

Boole murió rodeado de honores, y con una fama cada vez mayor, el 8 de diciembre de 1864 a los 50 años. Su muerte prematura fue debida a una neumonía contraída al seguir pronunciando una conferencia cuando estaba empapado hasta la piel. Boole se dio perfecta cuenta de que había hecho una gran obra.

Capítulo Vigesimocuarto
EL HOMBRE, NO EL MÉTODO

HERMITE

Hablad con M. Hermite: jamás evoca una imagen concreto: sin embargo, se percibe inmediatamente que las entidades más abstractas son para él como criaturas vivientes.
Henri Poincaré

Los problemas importantes no resueltos exigen nuevos métodos para su solución, mientras los nuevos y poderosos métodos piden nuevos problemas para ser resueltos. Mas como Poincaré observó, es el hombre, no el método, el que resuelve un problema.
De los antiguos problemas causantes de nuevos métodos en Matemática, el del movimiento, y todo lo que esto implica para la mecánica, terrestre y celeste, puede ser recordado como uno de los principales instigadores del Cálculo, y al presente intenta establecer el razonamiento acerca del infinito sobre una base firme. Un ejemplo de nuevos problemas sugeridos por los nuevos métodos es el enjambre que el cálculo sensorial, popularizado entre los geómetras por sus resultados en la relatividad, planteó en la Geometría. Y, finalmente, con una confirmación de la observación de Poincaré, recordaremos que fue Einstein y no el método de los tensores quien resolvió el problema de dar una explicación matemática consecuente de la gravitación. Las tres tesis se encuentran reunidas en la vida de Charles Hermite, el principal matemático francés de la segunda mitad del siglo XIX, haciendo excepción de Poincaré, discípulo de Hermite, que pertenece en parte a nuestro propio siglo.
Charles Hermite, nacido en Dieuze, Lorena, Francia, el 24 de diciembre de 1822, difícilmente pudo haber elegido un momento más propicio para su nacimiento que la tercera década del siglo XIX. En ese momento se precisaba la rara combinación del genio creador y la capacidad para comprender la obra de los otros investigadores con objeto de coordinar las creaciones aritméticas de Gauss con los descubrimientos de Abel y Jacobi en las funciones elípticas, los notables progresos de Jacobi en las funciones abelianas y la vasta teoría de invariantes algebraicos que los matemáticos ingleses Boole, Cayley y Sylvester estaban desarrollando rápidamente.
Hermite casi perdió su vida en la Revolución francesa, aunque la última cabeza rodó casi un cuarto de siglo antes de que él hubiera nacido. Su abuelo paterno fue arruinado por la Commune y murió en prisión. El hermano del abuelo fue guillotinado. El padre de Hermite escapó debido a su juventud.

Si la capacidad matemática de Hermite fue heredada y probablemente procede del padre, quien estudió ingeniería. No encontrando placer por los estudios de ingeniería, Hermite padre renunció a ellos, y después de una iniciación igualmente errónea en la industria de la sal, terminó como comerciante en tejidos. Esta profesión fue, sin duda, elegida por el hecho de haberse casado con la hija de su patrón, Madeleine Lallemand, una mujer dominante que llevaba las riendas de su familia, y que mandaba en todo, desde el negocio hasta su marido. Consiguió establecer una posición de sólida prosperidad burguesa. Charles fue el sexto de siete hijos, cinco de sexo masculino y dos de sexo femenino. Nació con una deformidad de la pierna derecha, que le hizo cojear durante toda la vida, posiblemente una suerte para él pues fue un obstáculo para cualquier carrera relacionada con el ejército, y siempre tuvo que usar bastón. Su deformidad nunca afectó la uniforme dulzura de su carácter.

La primera educación de Hermite corrió a cargo de sus padres. Como el negocio seguía prosperando, la familia se traslado desde Dieuze a Nancy, cuando Hermite tenía 6 años. Luego, las exigencias cada vez mayores del negocio absorbieron todo el tiempo de los padres, y Hermite fue enviado al Liceo de Nancy. Como esta escuela no les pareciera adecuada a los padres, cada vez más enriquecidos, decidieron enviar a Charles a París. Allí estudió durante breve tiempo en el Liceo Henry IV, y de allí pasó, cuando tenía 18 años, al más famoso (o más infame) Louis-le-Grand, el "Alma Mater" del pobre Galois, para ingresar en la Politécnica.

Durante cierto tiempo pareció que Hermite iba a repetir el desastre de su indómito predecesor en Louis-le-Grand. Sentía la misma repugnancia por la retórica y la misma indiferencia para la Matemática elemental. Pero las buenas conferencias sobre Física le fascinaban, y pronto prestó su cordial cooperación en el proceso bilateral de adquirir una educación. Más tarde, cuando ya no era molestado por los pedantes, Hermite llegó a conocer el griego y el latín, y escribía una prosa bella y clara.

Quienes están en contra de los exámenes podrán encontrar un argumento en Hermite. En las carreras de estos dos famosos alumnos de Louis-le-Grand, Galois y Hermite, se encuentra algo que debe hacer meditar a quienes creen que los exámenes son una excelente medida para ordenar a los seres humanos según sus métodos intelectuales. Habrá que preguntarse si esos defensores han empleado sus cabezas o sus pies para llegar a tal conclusión.

Tan sólo por la gracia de Dios y por la diplomática persistencia del inteligente profesor Richard, que había hecho cuanto pudo, 15 años antes, para salvar a Galois, Hermite no fue rechazado por los estúpidos jueces. Siendo aún estudiante en el Liceo, Hermite, siguiendo los pasos de Galois, sustituía las lecciones elementales por la lectura privada en la biblioteca de Sainte-Gene-Yiéve, donde leyó la memoria de Lagrange sobre la resolución de las ecuaciones numéricas. Con sus ahorros compró la traducción francesa de las *Disquisiliones Arithmeticae* de Gauss, y, lo que es más, las comprendió como pocos las han comprendido antes y las comprenderán en el futuro. Por esa época, conociendo lo que Gauss había hecho, Hermite estaba preparado para seguir adelante. "Fue en estos dos libros, solía decir en su vida ulterior, donde aprendí Álgebra". Euler y Laplace también le instruyeron a través de sus obras. Sin embargo, el comportamiento de Hermite en los exámenes fue mediocre, por emplear la calificación más halagadora posible.

Recordando el trágico fin de Galois, Richard intentó apartar a Hermite de las investigaciones originales, y conducirle a través de las aguas más fangosas de los exámenes para que ingresara en la Escuela Politécnica, la sucia zanja en la que Galois se ahogó. De todos modos, el buen Richard no pudo menos de decir al padre de Hermite que Charles era “un joven Lagrange".

Los *Nouvelles Annales de Mathématiques,* una revista dedicada a los estudiantes de las escuelas superiores, fueron fundados en 1842. El primer volumen contiene dos trabajos compuestos por Hermite cuando todavía estudiaba en Louis-le-Grand. El primero es un simple ejercicio de

Geometría analítica sobre secciones cónicas, y no muestra gran originalidad. El segundo, que ocupa tan sólo seis páginas y media en las obras completas de Hermite, es algo muy diferente. Su título era: *Consideraciones sobre la solución algebraica de la ecuación de quinto grado.*

"Es sabido, comienza diciendo el modesto matemático de 20 años, que Lagrange hizo depender la solución algebraica de la ecuación general de quinto grado de la determinación de una raíz y de una ecuación particular de sexto grado, que llamó una ecuación reducida [en la actualidad una resolvente]... De modo que si la resolvente se descompone en factores racionales de segundo o tercer grado, tendremos la solución de la ecuación de quinto grado. Intentaré probar que tal descomposición es imposible". Hermite no sólo consiguió esta demostración con un bello y simple argumento, sino también mostró al hacer esto que era un algebrista. Con pocos y ligeros cambios este breve trabajo muestra lo que se requiere para tal operación.

Puede parecer extraño que un joven capaz de seguir el razonamiento matemático, según demostró Hermite en su trabajo sobre la quíntica general, pueda encontrar dificultades en la Matemática elemental. Per no es necesario comprender, ni siquiera oír hablar, de gran parte de la Matemática clásica desarrollada en el curso de su larga historia, para ser capaz de seguir o hacer obra creadora en la Matemática que se ha desarrollado desde el año 1800, y es aun de vivo interés para los matemáticos. El tratamiento geométrico (sintético) de las secciones cónicas de los griegos, por ejemplo, no necesita ser comprendido por quienes actualmente desee estudiar la Geometría moderna; ni se necesita Geometría alguna para quien guste de los estudios algebraicos o aritméticos. En menor grado puede decirse lo mismo para el Análisis, donde el lenguaje geométrico usado es el más sencillo, no siendo necesario ni deseable cuando se trata de las demostraciones modernas. Como último ejemplo recordaremos que la Geometría descriptiva, de gran utilidad para los ingenieros, no tiene prácticamente utilidad para los que se dedican a la Matemática. Algunos de los temas más difíciles de la Matemática, que aun se plantean, exigen tan sólo un ligero conocimiento del Álgebra y una clara inteligencia para su comprensión. Tales son la teoría de grupos finitos, la teoría matemática del infinito y parte del Cálculo de probabilidades y de la Aritmética superior. No es, pues, asombroso que los amplios conocimientos que se exigen a un candidato para el ingreso en una escuela técnica científica o hasta para obtener un título en tales escuelas, sean poco menos que inútiles para la carrera matemática. Esto explica los triunfos espectaculares de Hermite como matemático creador, y su dificultad para escapar del completo desastre ante el tribunal de exámenes.

Más tarde, en 1842, teniendo 20 años, Hermite se presentó a los exámenes de ingreso de la Escuela Politécnica. Pasó, pero ocupando el lugar 68 en orden de mérito. Por entonces ya era mejor matemático que algunos de sus jueces. El resultado humillante de sus exámenes causó una impresión sobre el joven maestro que jamás pudo ser borrada por todos los triunfos obtenidos más tarde.

Hermite permaneció sólo un año en la Politécnica. No fue eliminado por falta de conocimientos, sino por su pie anormal, que, de acuerdo con las disposiciones, le hacían incapaz para ocupar los cargos a que tenían derecho los estudiantes brillantes de la Politécnica. Quizá haya sido un bien para Hermite la expulsión de la Escuela; su ardiente patriotismo quizá le hubiera hecho mezclarse en una u otra de las reyertas políticas o militares tan queridas al efervescente temperamento francés. Sin embargo, el año no había sido perdido. En lugar de dedicarse a la Geometría descriptiva, por la que sentía profundo odio, Hermite empleó su tiempo en el estudio de las funciones abelianas, que en aquella época (1842) quizá era el tema de mayor interés e importancia para los grandes matemáticos de Europa. También pudo conocer a Joseph Liouville (1809-1882) un matemático de primera categoría y editor del *Journal des Mathématiques.*

Liouville reconoció el genio de Hermite en cuanto lo vio. De pasada recordaremos que Liouville inspiró a William Thomson, Lord Kelvin, el famoso físico escocés, una de las más notables definiciones de lo que es un matemático. "¿Sabéis qué es un matemático?", preguntó una vez Kelvin en la clase. Se levantó, se acercó al pizarrón, y escribió:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{p}$$

Colocando su dedo sobre lo que había escrito, se dirigió a la clase: "Un matemático es un individuo para quien esto es tan conocido como lo es para vosotros el hecho de que dos y dos son cuatro. Liouville era un matemático". Por lo que se refiere al grado de dificultad, la obra del joven Hermite en las funciones abelianas, comenzada antes de que tuviera 21 años, está con respecto a la fórmula de Kelvin en una relación igual a la que existe entre tal fórmula y el conocido ejemplo de "2 y 2 son cuatro". ¡Recordando la cordial bienvenida que el anciano Legendre acordó a la obra revolucionaria del joven y desconocido Jacobi, Liouville pensó que Jacobi mostraría igual generosidad para Hermite, que entonces iniciaba su trabajo. No se equivocó.

La primera de las cartas de Hermite a Jacobi está fechada en París, en el mes de enero de 1843. "Vuestra memoria sobre las funciones periódicas cuádruples surgida en la teoría de funciones abelianas, me ha llevado a un teorema, para la división de los argumentos [variables] de estas funciones, análogo al que habéis establecido... para obtener la expresión más simple de las raíces de las ecuaciones tratadas por Abel. M. Liouville me ha incitado a escribiros para someter este trabajo a vuestra consideración. Al hacerlo, Señor, espero seáis tan amable que lo recibáis con toda la indulgencia que necesita". Así comienza su labor en la Matemática.

Recordaremos brevemente la simple naturaleza del problema en cuestión: las funciones trigonométricas son funciones de una variable con un período; por tanto sen $(x + 2p) = \text{sen}\, x$, donde x es la variable y $2n$ es el período. Abel y Jacobi, "invirtiendo" las integrales elípticas, describieron funciones de una variable y *dos* períodos, o sea $f(x + p + q) = f(x)$, donde p, q son los períodos (véase capítulos 12, 18). Jacobi descubrió funciones de dos variables y cuatro períodos, o sea

$$F(x + a + b, y + c + d) = F(x,y),$$

donde a, b, c, d son los períodos. Un problema que pronto se encuentra en Trigonometría es expresar $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, o $\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$, o de un modo general $\text{sen}\left(\frac{x}{n}\right)$ donde n es un número entero, en función de sen x (y posiblemente otras funciones trigonométricas de x). El problema correspondiente para las funciones de dos variables y cuatro períodos, fue el que Hermite abordó. En el problema trigonométrico somos finamente llevados a ecuaciones muy sencillas; en el problema incomparablemente más difícil de Hermite el resultado es además una ecuación (de grado n^4), y lo inesperado acerca de esta ecuación es que se puede resolver algebraicamente, es decir, por radicales.

Eliminado de la Politécnica por su cojera, Hermite puso sus ojos en la profesión docente como un medio donde poder ganar su sustento, mientras continuaba trabajando en su amada Matemática. La carrera docente se abría ante él, tuviera o no título, pero las reglas y disposiciones eran inexorables, y no hacían excepciones. La rutina oficinesca en forma de balduque siempre amenaza al hombre que sigue una senda equivocada, y casi estranguló a Hermite.

Incapaz de curarse de su "perniciosa originalidad", Hermite continuó sus investigaciones hasta el momento en que, teniendo 24 años, tuvo que abandonar los descubrimientos fundamentales para llegar a comprender las trivialidades requeridas para la enseñanza elemental (bachilleres de artes y ciencias). Dos pruebas más difíciles debían completar la primera antes de que el joven genio matemático obtuviera el certificado para dedicarse a la enseñanza, pero, por fortuna, Hermite escapó de la última y peor cuando algunos amigos influyentes le nombraron para un cargo donde podía burlarse de los examinadores. Pasó sus exámenes (en 1847-48) muy difícilmente. Pero sin la cordialidad de dos de los inquisidores, Sturm y Bertrand, buenos matemáticos que reconocieron en él a un excelente investigador en cuanto lo vieron es probable que Hermite no hubiera sido aprobado. (Hermite se casó con Louise, hermana de Bertrand, en 1848).

Por un irónico capricho del destino el primer triunfo académico de Hermite fue su nombramiento, en 1848, como juez para los exámenes de admisión en la Politécnica, en la que casi había sido rechazado. Pocos meses más tarde fue nombrado repetidor en la misma institución. Se encontraba ahora seguro, en un lugar donde ningún juez podía hacer liada contra él. Pero para llegar a esta "triste eminencia", y adaptarse a las estupideces del sistema oficial, había tenido que sacrificar casi cinco años de lo que seguramente fue el período de su mayor capacidad inventiva.

Finalmente, habiendo satisfecho a sus crueles examinadores, o habiéndose evadido de ellos, Hermite se encontraba en condiciones para llegar a ser un gran matemático. Su vida era pacífica. Desde 1848 hasta 1850 sustituyó a Libri en el Collège de France. Seis años más tarde, teniendo 34 años, fue elegido miembro de la Academia de Ciencias. A pesar de su reputación mundial como matemático creador fue necesario que pasaran 47 años, antes de que obtuvieran un cargo adecuado. Fue nombrado profesor en la Escuela Normal tan sólo en 1869 y, finalmente, en 1870 fue profesor en la Sorbona, cargo que mantuvo hasta su retiro, 27 años más tarde. Durante el tiempo que ocupó este influyente cargo enseñó a toda una generación de distinguidos matemáticos franceses, entre los que mencionaremos a Émile Picard, Gaston Darboux, Paul Appell, Émile Borel, Paul Painlevé y Henri Poincaré. Pero su influencia se extendió mas allá de Francia, y sus trabajos clásicos ayudaron a educar a sus contemporáneos en todos los países.

Un rasgo especial de la bella obra de Hermite está íntimamente relacionado con su repugnancia a aprovecharse de su influyente posición para formar a todos sus discípulos siguiendo su propia imagen. Esta es la inextinguible generosidad que invariablemente derrochó entre sus colegas los matemáticos. Probablemente, ningún otro matemático de los tiempos modernos ha mantenido una correspondencia científica tan voluminosa con todos los investigadores de Europa como Hermite, y en todas sus cartas es siempre cordial y alentador. Muchos de los matemáticos de la segunda mitad del siglo XIX le deben mucho a la publicidad que Hermite dio a sus primeros estudios. En este, como en otros respectos, no hay un carácter más delicado en toda la historia de la Matemática. Jacobi fue tan generoso como él, con la sola excepción de la primera acogida que dispensó a Eisenstein, pero tenía una tendencia al sarcasmo (muchas veces extraordinariamente divertido, salvo para la infeliz víctima), que estaba totalmente ausente en el genial francés.

Hermite fue digno de la generosa observación de Jacobi cuando el desconocido joven matemático se aventuró a acercarse a él con su primera gran obra sobre las funciones abelianas. "No se desconcierte señor, escribía Jacobi, si algunos de sus descubrimientos coinciden con otros que yo he hecho hace tiempo. Como debéis comenzar donde yo terminé, debe existir necesariamente una pequeña esfera de contacto. En el futuro, si me honráis con vuestras comunicaciones, sólo tendré ocasión de aprender".

Alentado por Jacobi, Hermite no sólo le hizo conocer su trabajo, sobre las funciones abelianas, sino que le envió cuatro enormes cartas sobre la teoría de números, la primera en 1847. Estas cartas, la primera de las cuales fue escrita cuando Hermite tenía 24 años, abre nuevos caminos (como luego veremos), y bastaría para que Hermite fuera considerado como un matemático creador de primera categoría. La genialidad de los problemas que abordó y la audaz originalidad de los métodos ideados para su solución, aseguran que Hermite sea recordado como uno de los matemáticos innatos de la historia.

La primera carta se inicia con una excusa. "Han transcurrido casi dos años sin haber dado respuesta a la carta que me hicisteis el honor de escribirme. Hoy le pido perdón por mi negligencia y quiero expresarle toda la alegría que siento al verme ocupar un lugar en el repertorio de vuestras obras. [Jacobi publicó parte de la carta de Hermite, dándole la importancia que merecía, en algunas de sus obras]. Habiendo estado alejado durante largo tiempo del trabajo, he quedado profundamente conmovido por esa prueba de vuestra cordialidad; permitidme, señor, creer que no me abandonaréis". Hermite añade luego que otra investigación de Jacobi le inspiró los trabajos que estaba realizando.

Si el lector examina lo que hemos dicho acerca de las funciones *uniformes* de una sola variable en el capítulo sobre Gauss (una función uniforme toma *sólo un* valor para cada valor de la variable), podrá comprender la siguiente exposición acerca de lo que Jacobi demostró: una función uniforme de solo una variable con *tres* periodos diferentes es imposible. El hecho de que existan funciones uniformes de una variable que tienen *un* período o *dos* períodos queda demostrado recurriendo a las funciones trigonométricas y a las funciones elípticas. Este teorema de Jacobi, declara Hermite le sugirió su idea para los nuevos métodos que introdujo en Aritmética superior. Aunque estos métodos son demasiado técnicos para explicarlos en este lugar, se puede resumir brevemente el espíritu de uno de ellos.

La Aritmética, en el sentido de Gauss, se ocupa de las propiedades de los números enteros racionales 1, 2, 3...; *los* irracionales (como la raíz cuadrada de 2) son excluidos. Gauss investigó, en particular, las soluciones en números enteros de amplias clases de ecuaciones indeterminadas con dos o tres incógnitas, por ejemplo, $ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$ donde a, b, c, m son números enteros, y es necesario tratar todas las soluciones x, y, de la ecuación en números enteros. El punto que hay que señalar aquí es que el problema se plantea y se resuelve completamente en el campo de los enteros racionales, es decir en el reino del número *discontinuo.* Utilizar el *Análisis,* que está adaptado a la investigación de números *continuos,* a tal problema *discontinuo* parecería una imposibilidad, pero esto es lo que Hermite logró. Partiendo de una fórmula *discontinua,* aplicó el *Análisis* al problema, y finalmente obtuvo resultados en el terreno discontinuo del cual había partido. Como el Análisis está mucho más desarrollado que cualquiera de las técnicas discontinuas inventadas para el Álgebra y la Aritmética, el progreso de Hermite fue comparable a la introducción de la maquinaria en las industrias medievales.

Hermite tenía a su disposición una maquinaria mucho más poderosa, tanto algebraica como analítica, que la que estaba a la disposición de Gauss cuando escribió las *Disquisitiones Arithmeticae*. Con la gran invención de Hermite, estos instrumentos más modernos le capacitaron para abordar problemas que habían desconcertado a Gauss en 1800. En un solo paso Hermite recogió los problemas *generales* del tipo que Gauss y Eisenstein habían planteado, y al fin comenzó el estudio aritmético de las formas cuadráticas con cualquier número de incógnitas. La naturaleza general de la "teoría de formas" aritmética puede apreciarse en el enunciado de un problema especial. En lugar de la ecuación gaussiana $ax^2 + 2bxy + ey^2 = m$ de *segundo* grado con *dos* incógnitas (x, y), se requiere tratarlas soluciones en números enteros de ecuaciones similares de grado n, con s incógnitas donde n, s son números enteros, y el grado de cada término en la primera parte de la ecuación es *n* (no 2 como en la ecuación de Gauss). Después de meditar atentamente sobre el hecho de que las investigaciones de Jacobi acerca de la periodicidad de las funciones uniformes dependen de cuestiones más profundas referentes a la teoría de las formas cuadráticas, Hermite bosquejó su programa.

"Pero una vez llegado a este punto de vista, los problemas, suficientemente amplios, que pensé proponer me parecieron sin importancia al lado de las grandes cuestiones de la teoría general de formas. En este ilimitado campo de investigaciones que Monsieur Gauss [Gauss vivía aún cuando Hermite escribía estas palabras y de aquí el cortés "Monsieur"] nos ha abierto, el Álgebra y la teoría de números parecen necesariamente fundirse en el mismo orden de los conceptos analíticos de los cuales nuestro presente conocimiento no nos permite aún formarnos una idea exacta".

Hace entonces una observación que, aunque no muy clara, puede interpretarse suponiendo que la clave para las sutiles relaciones entre el Álgebra, la Aritmética superior y ciertas partes de la teoría de funciones, se encontrará en una completa comprensión de *ese tipo* de "números" que son necesarios y suficientes para la solución explícita de todos los tipos de ecuaciones algebraicas. Así para $x^3 - 1 = 0$, es necesario y suficiente comprender $\sqrt[3]{1}$; para $x^5 + ax + b = 0$, donde a, b son números dados, ¿qué tipo de "número" x debe ser inventado para que x pueda ser expresado *explícitamente* en función de a, b? Gauss, como es natural, dio un tipo de respuesta: Cualquier raíz x es un número complejo. Pero esto es sólo un comienzo. Abel demostró que si únicamente se permite un número *finito* de operaciones racionales y extracciones de raíces, no hay fórmula explícita que dé x en función de a, b. Volveremos a ocuparnos más tarde de esta cuestión. Parece que Hermite, ya muy precozmente (1848, teniendo 26 años), albergaba en su cabeza uno de sus grandes descubrimientos.

En su actitud ante los números, Hermite respetaba místicamente la tradición de Pitágoras y Descartes, el credo matemático de este último, como veremos en seguida, era esencialmente pitagórico. En otras cuestiones, el suave Hermite mostró una marcada inclinación hacia el misticismo. A los 43 años era una agnóstico tolerante, como muchos hombres de ciencia franceses de su época. Luego, en 1856, cayó repentinamente enfermo, y, aprovechando su estado, el ardiente Cauchy, que siempre había deplorado que su brillante y joven amigo tuviera un criterio liberal sobre las materias religiosas, cayó sobre el postrado Hermite, y le convirtió al catolicismo romano. Desde entonces Hermite fue un católico devoto, y la práctica de su religión le proporcionó grandes satisfacciones.

El misticismo por los números de Hermite es bastante innocuo, y es una de las características personales sobre las que todo argumento seria vano. Brevemente, Hermite creía que los números tienen una existencia por sí mismos, por encima de todo control humano. Las Matemáticas, pensaba, pueden tener en ciertas ocasiones algún destello de las armonías sobrehumanas que regulan este reino etéreo de la existencia lo mismo que los grandes genios de la ética y de la moral tienen algunas veces la visión de las perfecciones del reino de los cielos.

Puede afirmarse, probablemente, que ningún notable matemático actual que haya prestado cierta atención a lo realizado en los últimos 50 años (especialmente en los últimos 25), para intentar comprender la naturaleza de la Matemática y el proceso del razonamiento matemático estará d e acuerdo con el místico Hermite. Dejamos a juicio del lector resolver si este moderno escepticismo es una ventaja o una desventaja, en comparación con el credo de Hermite. "La existencia matemática", que se considera ahora casi universalmente por los jueces competentes como un concepto erróneo, fue tan admirablemente expresado por Descartes en su teoría del triángulo eterno, que sus palabras pueden ser citadas aquí como un epítome de las creencias místicas de Hermite.

"Imagino un triángulo, aunque quizá tal figura no existe ni ha existido jamás en ninguna parte del mundo fuera de mi pensamiento. De todos modos, esta figura tiene cierta naturaleza o forma o determinada esencia que es inmutable o eterna que yo no he inventado y que no depende de mi mente. Así se aprecie el hecho de que puedo demostrar diversas propiedades de este triángulo, por ejemplo que la suma de sus tres ángulos interiores es igual a dos ángulos rectos, que el ángulo mayor es el que se opone al lado mayor, y así sucesivamente.

Lo desee o no, reconozco de un modo muy claro y convincente que estas propiedades se hallan en el triángulo, aunque jamás haya pensado antes acerca de ellas, y aunque esta sea la primera vez que he imaginado un triángulo. De todos modos, nadie puede decir que yo las he inventado o imaginado". Trasladar "verdades eternas" tan simples como 1 + 2 = 3, 2 + 2 = 4, a la Geometría perdurable de Descartes, constituyó la Aritmética sobrehumana de Hermite.

Una investigación aritmética de Hermite, aunque más bien de tipo técnico, puede ser mencionada aquí como un ejemplo del aspecto profético de la Matemática pura. Recordaremos que Gauss introdujo los *enteros complejos* (números de la forma, a + bi, donde a, b son enteros racionales e i denota $\sqrt{-1}$) en la Artimética superior para dar a la ley de la reciprocidad cuadrática su más simple expresión. Dirichlet y otros continuadores de Gauss estudiaron luego las formas cuadráticas en las cuales los enteros racionales que aparecen como variables y coeficientes son reemplazados por enteros complejos gaussianos. Hermite pasó al caso general de este tipo e investigó la representación de los enteros en lo que actualmente se denomina formas de Hermite. Un ejemplo de una de tales formas (para el caso especial de dos variables complejas x_1, x_2 y sus "conjugadas" x_1, x_2 en lugar de n variables) es

$$a_{11}x_1\overline{x_1} + a_{12}x_1\overline{x_2} + a_{21}x_2\overline{x_1} + a_{22}x_2\overline{x_2}$$

en la cual la línea sobre la letra que denota un número complejo indica el conjugado de ese número; es decir, si $x + iy$ es un número complejo su "conjugado", es $x - iy$; y los coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} son tales que $a_{ij} = a_{ji}$ para

$$(i,j) = (1,1), (1,2), (2,1), (2,2),$$

de modo que a_{12} y a_{21} son conjugados, y cada uno de a_{11}, a_{22} es su propio conjugado (por tanto a_{11}, a_{22} son números reales). Se aprecia fácilmente que toda la forma es real (libre de i) si todos los productos se multiplican, pero ésta se expresa más "naturalmente" en la forma dada.

Cuando Hermite inventó tales formas estaba interesado en encontrar qué números están representados por las formas. Setenta años más tarde se encontró que el Álgebra de las formas de Hermite es indispensable en la física matemática, particularmente en la moderna teoría de los cuantos. Hermite no tenía la menor idea de que su matemática pura tendría valor para la ciencia mucho tiempo después de su muerte.

En efecto, al igual que Arquímedes, jamás le importaron nada las aplicaciones científicas de la Matemática. Pero el hecho de que la obra de Hermite haya dado a la Física un instrumento útil, es quizá otro argumento en favor de quienes creen que los matemáticos justifican del mejor modo su existencia abstracta cuando se abandonan a sus propios e inescrutables recursos.

Dejando aparte los espléndidos descubrimientos de Hermite en la teoría de invariantes algebraicos, por ser demasiado técnica para ser expuesta en este lugar, nos ocuparemos de dos de sus más espectaculares conquistas en otros campos. La alta estima que la obra de Hermite de invariantes mereció de sus contemporáneos se aprecia, claramente en las palabras de Sylvester:

"Cayley, Hermite y yo constituimos una Trinidad Invariante". Sylvester no llega a decir qué papel desempeñó cada uno de ellos en esta asombrosa Trinidad, pero poco importa, pues es posible que cada uno de los miembros de este trébol fuera capaz de transformarse en sí mismo o en cualquiera de los otros dos seres coinvariantes.

Los dos campos donde Hermite encontró lo que quizá sean los resultados individuales más notables de toda su bella obra, corresponden a la ecuación general de quinto grado y a los números trascendentes. Sus hallazgos referentes al primer problema resaltan claramente en la introducción a su breve nota *Sur la resolution de l'équation du cinquéme degré.* (Sobre la solución de la ecuación [general] de quinto grado), publicada en las *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* en 1858 cuando Hermite tenía 36 años.

"Es sabido que la ecuación general de quinto grado puede ser reducida por una sustitución (de la incógnita x) de coeficientes dados sin el uso de otro radical que las raíces cuadradas o raíces cúbicas, a la forma:

$$x^5 - x - a = 0$$

[Esto es, si podemos resolver *esta* ecuación, podremos resolver la ecuación general de quinto grado].

"Este notable resultado, debido al matemático inglés Jerrard, es el paso más importante que se ha dado en la teoría algebraica de las ecuaciones de quinto grado desde que Abel demostró que es imposible una solución por radicales. Esta imposibilidad muestra, en efecto, la necesidad de introducir algún nuevo elemento analítico [algún nuevo tipo de función] para buscar la solución, y en este sentido parece natural considerar como un auxiliar las raíces de la ecuación muy simple que hemos mencionado. De todos modos, para justificar rigurosamente su uso como un elemento esencial en la solución de la ecuación general, queda por ver siesta simplicidad deformas realmente nos permiten llegar a alguna idea de la naturaleza de sus raíces, captar lo que es peculiar y esencial en la forma de existencia de estas cantidades, de las cuales nada se sabe más allá del hecho de que no son expresables por radicales.

"Ahora bien, es muy notable que la ecuación de Jerrard se preste con la mayor facilidad a esta investigación, y es, en el sentido que explicaremos, susceptible de una solución analítica real. Podemos, en efecto, concebir la cuestión de la solución algebraica de las ecuaciones desde un punto de vista diferente del que durante largo tiempo se ha seguido para la solución de ecuaciones de los cuatro primeros grados, y que nosotros hemos utilizado especialmente. En lugar de expresar el sistema íntimamente relacionado de raíces, considerado como funciones de los coeficientes, por una fórmula que englobe radicales de múltiples valores[1], podemos intentar obtener las raíces expresadas separadamente por tantas funciones uniformes diferentes [de un solo valor] de variables auxiliares, como en el caso del tercer grado. En este caso, cuando la ecuación

$$x^3 - 3x + 2a = 0$$

[1] Por ejemplo, como en la simple cuadrática $x^2 - a = 0$: las raíces son x = +Ö` $a$, $x$ = -Ö `a, el "múltiple valor" del radical implicado, aquí una raíz cuadrada o irracional de *segundo* grado, aparece en el doble signo, cuando decimos brevemente que las *dos* raíces son √a. La fórmula que da las *tres* raíces de las ecuaciones cúbicas implica la irracionalidad de tres valores $\sqrt[3]{1}$ que tiene *los tres* valores 1, ½, $(-1 + \sqrt{-3})$, ½ $(- 1 - \sqrt{-3})$.

está en discusión, basta, como sabemos, representar el coeficiente *a* por el seno de un ángulo, o sea *A*, para que las raíces sean aisladas como las siguientes funciones bien determinadas

$$2 \operatorname{sen} \frac{A}{3}$$
$$2 \operatorname{sen} \frac{A+2p}{3}$$
$$2 \operatorname{sen} \frac{A+4p}{3}$$

[Hermite recuerda aquí la conocida "solución trigonométrica" de la cúbica ordinariamente estudiada en el segundo curso de Álgebra elemental. La "variable auxiliar" es A; las "funciones uniformes" son aquí senos].

"Ahora bien, hay un hecho muy semejante que tenemos que mencionar referente ala ecuación

$$x^5 - x - a = 0$$

Sólo que en lugar de senos y cosenos es necesario recurrir a las funciones elípticas..."

Hermite procedió luego a resolver *la ecuación general de quinto grado,* usando para este fin las funciones elípticas (estrictamente, funciones modulares elípticas, pero la distinción no tiene importancia aquí). Es casi imposible comprender por quien no sea matemático la brillantez espectacular de tal hazaña. Para citar un símil que en realidad no es adecuado, Hermite encontró la famosa "armonía perdida" cuando ningún mortal tenía la más breve sospecha de que existiera en alguna parte en el tiempo y en el espacio. No hay ni que decir que este triunfo totalmente imprevisto produjo sensación en el mundo matemático. Por mejor decir, inauguró un nuevo rumbo del Álgebra y del Análisis en el que el gran problema era descubrir e investigar aquellas funciones en cuyos términos pudiera ser resuelta explícitamente en forma finita. la ecuación general de *n* grado. El mejor resultado hasta ahora obtenido es el del discípulo de Hermite, Poincaré, en el año 1880, quien creó las funciones que dan la solución requerida. Resultó ser una generalización "natural" de las funciones elípticas. La característica de las funciones era que generalizadas tenían periodicidad. Otros detalles nos llevarían demasiado lejos, pero volveremos a ocuparnos de estas cuestiones al hablar de Poincaré.

Otro de los resultados aislados sensacionales de Hermite fue el que estableció la *transcendencia* del número que en el Análisis matemático se representa por la letra *e, o* sea

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

donde l! Significa 1, 2! = 1×2, 3! = $1 \times 2 \times 3$, 4! = $1 \times 2 \times 3 \times 4$, y así sucesivamente; este número es la "base" del llamado "sistema natural" de logaritmos, y es aproximadamente 2.718281828... Se ha dicho que es imposible concebir un Universo en el que *e* y π (la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro) no existan. Sin embargo, lo que puede ocurrir (en la realidad es falso) es que ese encuentre por todas partes en la Matemática corriente, pura y aplicada. Del siguiente hecho puede inferirse el porqué esto es así, al menos en lo que concierne a la Matemática aplicada: e^x, considerada como una función de x, es la *única* función de x cuya derivada respecto de x es igual a la, función misma[2].

El concepto de "transcendencia" es extraordinariamente simple y también extraordinariamente importante. Cualquier raíz de una ecuación algebraica cuyos coeficientes son enteros racionales (0, ±1, ±2, ...) se llama un *número algebraico.* Así $\sqrt{-1}$, 2.78 son números algebraicos, debido a que son raíces de las respectivas ecuaciones algebraicas $x^2 + 1 = 0$, $50x - 139 = 0$, en las cuales los coeficientes (1, 1, para el primero, 50, - 139 para el segundo) son enteros racionales. Un "número" que *no* es algebraico se llama *transcendente.* Diciéndolo con otras palabras, un número transcendente es aquel que *no* satisface una ecuación algebraica de coeficientes enteros racionales.

Ahora bien, dado un "número" constituido de acuerdo con alguna ley definida, es una cuestión muy importante preguntarse si es algebraico o transcendente. Consideremos, por ejemplo, el siguiente número simplemente definido

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^{24}}+\frac{1}{10^{120}}+\ldots$$

en el que los exponentes, 2, 6, 24, 120,... son las factoriales sucesivas, o sea $2 = 1 \times 2$, $6 = 1 \times 2 \times 3$, $24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$, $120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$... y la serie indicada continúa "hasta el infinito" de acuerdo con la misma ley que para los términos dados. El siguiente término es $1 / 10^{720}$; la suma de los primeros tres términos es 0.1 + 0.01 + 0.000001 = 0.110001, y puede ser demostrado que la serie define realmente algún número definido que es menor que 0.12. Este número ¿es una raíz de cualquier ecuación algebraica de coeficientes enteros racionales? La respuesta es negativa aunque probar esto sin haber sido demostrado como proceder es una prueba muy difícil que significa gran capacidad matemática. Por otra parte, el número definido por las series infinitas

$$\frac{1}{10^5}+\frac{1}{10^8}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^{11}}+\frac{1}{10^{14}}+\ldots$$

es algebraico; es la raíz de $99900x - 1 = 0$, (como puede ser comprobado por los lectores que recuerden cómo se suma una progresión geométrica convergente infinita).

El primero que demostró que ciertos números son transcendentes fue Joseph Liouville (el mismo que alentó a Hermite a escribir a Jacobi) quien, en 1844, descubrió una clase muy extensa de números transcendentes, de los cuales todos aquellos de la forma

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^{24}}+\frac{1}{n^{120}}+\ldots$$

donde n es un número real mayor de 1 (el ejemplo mencionado antes corresponde a $n = 10$) se cuentan entre los más sencillos. Pero probablemente demostrar que un sospechoso *particular,* como e o π es o no transcendente es un problema más difícil que inventar toda una clase infinita de transcendentes; el matemático con capacidad inventiva, dicta, hasta cierto punto, las condiciones que han de actuar, mientras el número sospechoso es completamente dueño de la

[2] Estrictamente, ae^x, donde a no depende de x, es lo más general, pero la. "constante multiplicativa" a carece de importancia aquí.

situación, y en este caso es el matemático, no el sospechoso, quien recibe las órdenes que tan sólo confusamente comprende. Así, cuando Hermite demostró, en 1873, que *e* es transcendente, el mundo matemático quedó asombrado ante la maravillosa sencillez de la prueba.
Desde los tiempos de Hermite se ha demostrado que muchos números (y clases de números) son transcendentes. Observaremos de pasada que probablemente se han de producir nuevas pleamares en las costas de este oscuro mar. En 1934, el joven matemático ruso Alexis Gelfond demostró que *todos* los números del tipo a^b, donde a no es 0 ni 1, *y* b es *cualquier número algebraico irracional* son transcendentes. Esto resuelve el séptimo de los 23 problemas matemáticos sobresalientes sobre los que David Hilbert llamó la atención de los matemáticos en el Congreso internacional de París en 1900. Obsérvese que "irracional" es *necesario* en el enunciado del teorema de Gelfond *(si* $b = n/m$, donde n, m son enteros racionales, entonces a^b, donde a es cualquier número algebraico, es una raíz de $x^m - a^n = 0$*), y puede* demostrarse que esta ecuación es equivalente a una cuyos coeficientes son todos enteros racionales.
La victoria inesperada de Hermite sobre la obstinada *e* hizo suponer a los matemáticos que *m* podría ser sometida siguiendo un procedimiento similar. Sin embargo, por lo que se refiere a Hermite ya había hecho bastante. "No arriesgaré nada, escribía a Borchardt, para intentar demostrarla transcendencia del número π. Si otros emprenden esta empresa, nadie más feliz que yo si triunfan en ella, pero creo, mi querido amigo, que será a costa de muchos esfuerzos". Nueve arios más tarde (en 1882), Ferdinand Lindemann, de la Universidad de Munich, usando métodos muy semejantes a los seguidos por Hermite para la solución de *e*, demostró que π es transcendente, resolviendo así para siempre el problema de la "cuadratura del círculo". De lo que Lindemann demostró se deduce que es imposible construir con regla y compás un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado, problema que ha atormentado a generaciones de matemáticos, ya antes de la época de Euclides.
Todos los charlatanes que aun se sienten atormentados por el problema deben plantearse concisamente la forma como resolvió la cuestión Lindemann. Este autor demostró que π *no* es un número *algebraico.* Pero cualquier problema *geométrico* que *es* resoluble con la ayuda de la regla y el compás, cuando *se lleva* a su forma *algebraica* equivalente, conduce a una o más ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros racionales, que pueden ser resueltas por sucesivas extracciones de raíces *cuadradas.* Como π no satisface tal ecuación, el círculo no se puede "cuadrar" con dichos instrumentos.
Si se emplean otros aparatos será fácil cuadrar el círculo. Para todos los que no sean locos de atar el problema quedó completamente muerto desde hace medio siglo. Tampoco tiene mérito en el momento actual calcular a con gran número de cifras decimales. En lugar de intentar hacer lo imposible, los místicos pueden dedicarse a contemplar la siguiente útil relación entre *e*, π, - 1 y $\sqrt{-1}$, hasta que aparezca tan familiar para ellos como lo es el ombligo de Buda a un swami hindu.

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1.$$

Quien pueda percibir este misterio intuitivamente, no necesitará cuadrar el círculo.
Después que Lindemann demostró que π es un número transcendente, el único problema importante no resuelto que atrae a los aficionados es el "último teorema de Fermat". Aquí, un hombre con verdadero genio puede tener probabilidades de triunfar. Esto no significa una invitación a todos los aficionados a inundar las redacciones de revistas matemáticas con supuestas pruebas; y a este respecto recordaremos lo que sucedió a Lindemann cuando

audazmente se planteó el famoso teorema. En 1901, Lindemann publicó una memoria de 17 páginas que parecía contener la prueba tan largo tiempo buscada. Señalado el error, Lindemann, impasible, empleó la mayor parte de los siguientes siete años intentando remendar lo irremendable, y en 1907 publicó sesenta y tres páginas con la prueba alegada, pero desde el principio podía verse que existía una falta en el razonamiento. Si esto no demuestra que es preciso un talento singular para resolver la cuestión nada podrá demostrarlo.

Por grandes que sean las contribuciones de Hermite a la parte técnica de la Matemática, tiene probablemente más importancia para la cultura su tenaz argumentación de que la ciencia está más allá de las naciones, y por encima de los credos que dominan o embrutecen a la perseguida humanidad. Nos basta examinar la serena belleza de su espíritu para que lamentemos no encontrar ahora en el mundo de la ciencia algo semejante. Hasta cuando los arrogantes prusianos humillaron París en la guerra francoprusiana, Hermite, aunque era patriota, levantó su cabeza, y vio claramente que la Matemática del "enemigo" era Matemática y nada más que Matemática. Actualmente, cuando un hombre de ciencia se plantea una cuestión, no es impersonal, en su supuesta amplitud de miras, sino agresivo, como corresponde a un hombre que está a la defensiva. Para Hermite era tan obvio que el conocimiento y la sabiduría no son prerrogativas de una secta, de un credo o de una nación, que jamás se esforzó en traducir sus pensamientos en palabras. Lo que Hermite sabía por instinto lo coloca dos siglos por delante de nuestra generación. Murió, amando al mundo sobre todas las cosas, el 14 de enero de 1901.

Capítulo Vigesimoquinto
EL HOMBRE QUE DUDA

KRONECKER

Todos los resultados de la más profunda investigación matemática deben en definitiva ser expresables en la forma simple de propiedades de los números enteros.
Leopold Kronecker.

Los matemáticos profesionales que con propiedad pueden ser llamados hombres de negocios son extraordinariamente raros. El que más se aproxima a este ideal es Kronecker (1823-1891), quien se las arregló de modo que cuando tenía 33 años pudo ya dedicar su talento soberbio a la Matemática mucho más cómodamente de lo que la mayor parte de los matemáticos han podido hacer.

El anverso de la carrera de Kronecker se encuentra, según una tradición familiar a los matemáticos americanos, en las empresas de John Pierpont Morgan, fundador de la banca Morgan and Company. Si es cierta esta tradición, Morgan, siendo estudiante en Alemania, mostró una capacidad matemática tan extraordinaria que sus profesores trataron de convencerle de que se dedicara para siempre a la Matemática, ofreciéndole un cargo universitario en Alemania que le facilitaría la labor. Morgan se negó, y dedicó todo su talento a las finanzas con los resultados que todos conocen. Los especuladores (en estudios académicos, no en Wall Street) pueden entretenerse reconstruyendo la historia del mundo sobre la hipótesis de que Morgan se hubiera dedicado a la Matemática.

Lo que habría sucedido en Alemania si Kronecker no hubiese abandonado las finanzas por la Matemática, ofrece también un amplio campo para la especulación. Su capacidad para los negocios era de primer orden; además era un ardiente patriota con una notable visión de la diplomacia europea, y un astuto cinismo que sus admiradores llamaron realismo.

Al principio fue liberal, como muchos jóvenes intelectuales judíos, pero Kronecker pronto se hizo conservador cuando no sólo tuvo el pan asegurado, sino también la manteca. Después de sus empresas financieras se proclamó leal defensor del implacable Bismark. El famoso episodio del despacho de Ems, que según algunos fue la chispa eléctrica que desencadenó la guerra franco-prusiana en *1870,* tuvo la cálida aprobación de Kronecker, y su comprensión de la situación era tan firme, que ya *antes* de la batalla de Weissenburg, cuando aun podía dudarse del genio militar de Alemania para rivalizar con Francia, Kronecker predijo confiadamente el triunfo de toda la campaña hasta en muchos de sus detalles. En aquella época, y en realidad durante toda su vida, estuvo en relaciones cordiales con los mejores matemáticos franceses, y tuvo la suficiente claridad de juicio para que sus opiniones políticas no nublaran su justa percepción de los méritos de sus rivales científicos. Quizá haya sido un bien que un hombre tan realista como Kronecker uniera su destino con el de la Matemática.

La vida de Leopold Kronecker fue fácil desde el día de su nacimiento. Hijo de judíos ricos, nació el *7* de diciembre de *1823* en Liegnitz, Prusia. Por un inexplicable descuido de los biógrafos oficiales de Kronecker (Heinrich Weber y Adolf Kneser) nada se sabe acerca de la madre de Leopold, aunque probablemente tuvo una, pues se limitaron al padre, quien tenía un negocio mercantil floreciente. El padre era un hombre bien educado, con una sed insaciable para la filosofía que transmitió a Leopold. Tuvo otro hijo, Hugo, de 17 años menos que Leopold, quien fue distinguido fisiólogo y profesor en Berna. La primera educación de Leopold con un profesor particular fue vigilada por el padre; la educación de Hugo vino a ser más tarde un agradable deber de Leopold.

La segunda fase de su educación en la escuela preparatoria para el Instituto Leopold fue notablemente influido por el co-rector Werner, un hombre con tendencias filosóficas y teológicas, quien más tarde instruyó a Kronecker cuando ingresó en el Instituto. Entre otras cosas, Kronecker se contagió de Werner de un liberalismo de teología cristiana; para el cual tuvo un entusiasmo que duró toda su vida. Con su cautela habitual Kronecker no abrazó la fe cristiana hasta prácticamente hallarse en el lecho de muerte, y entonces se permitió convertirse desde el judaísmo al cristianismo evangélico, teniendo 68 años.

Otro de los maestros de Kronecker en el Instituto, que también influyó profundamente sobre él, llegando a ser un amigo de toda la vida, fue Ernst Eduard Kummer(1810-1893), quien luego fue profesor en la Universidad de Berlín. Se trataba de uno de los matemáticos más originales que ha producido Alemania y de él volveremos a ocuparnos al hablar de Dedekind. Estos tres hombres, Kronecker padre, Werner y Kummer, administraron la inmensa capacidad innata de Leopold, modelaron su mente y encauzaron el futuro curso de su vida, de modo tan perfecto que aunque lo hubiera deseado le habría sido imposible separarse del camino marcado.

Ya en esta primera fase de su educación observaremos un rasgo notable del carácter general de Kronecker; su capacidad para tratar a las gentes y su instinto para contraer amistades duraderas con hombres de elevada posición o que ocuparían altos cargos, los cuales podrían serle útiles en los negocios o en la Matemática. Esta capacidad para lograr amistades convenientes, que es uno de los rasgos que distinguen a los hombres de negocios, fue una de las más características de Kronecker, y jamás le falló. No era un hombre conscientemente interesado ni presumido, sino tan sólo uno de esos felices mortales que triunfan con más facilidad que fracasan.

El comportamiento de Kronecker en el Instituto fue brillante y multifacético. Además de los clásicos idiomas griego y latino, que dominó con facilidad, y a los que toda su vida se sintió inclinado, estudió hebreo, filosofía y Matemática. Su talento matemático apareció precozmente bajo la experta guía de Kummer, del cual recibió atención especial. Sin embargo, el joven Kronecker no se concentró especialmente sobre la Matemática, aunque era evidente que su máximo talento se manifestaba en ese campo, sino que se dedicó a adquirir una amplia educación liberal, apropiada a sus múltiples capacidades. Aparte de estos estudios tomó lecciones de música, y fue un excelente pianista y cantante. La música, declaraba cuando ya era anciano, es la más bella de todas las bellas artes, con la posible excepción de la Matemática, que él comparaba a la poesía. Durante toda su vida conservó todas estas inclinaciones que siempre cultivó con entusiasmo. Su amor hacia los estudios clásicos dieron fruto tangible cuando se afilió a la Graeca, una sociedad dedicada a la traducción y popularización de los clásicos griegos. Su aguda apreciación del arte hizo de él un excelente crítico de pintura y escultura, y su bella casa de Berlín fue el lugar de cita de los músicos, entre ellos Félix Mendelssohn.

Después de ingresar en la Universidad en la primavera de 1841, Kronecker continuó su amplia educación, pero comenzó a concentrarse sobre la Matemática. Berlín se jactaba en aquella época de tener en su Facultad de matemática a Dirichlet (1805-1859), Jacobi (18041851) y Steiner (1796-1863).Eisenstein (1823-1852), que tenía la misma edad de Kronecker, también se estudiaba allí, y los dos llegaron a ser amigos.

La influencia de Dirichlet sobre los gustos matemáticos de Kronecker (particularmente en la aplicación del Análisis a la teoría de números) se aprecia claramente en sus escritos de madurez. Steiner parece que no causó gran impresión sobre él; Kronecker no sentía inclinación por la Geometría. Jacobi despertó su entusiasmo por las funciones elípticas, que iba a cultivar con gran originalidad y brillante resultado, principalmente en las nuevas aplicaciones de mágica belleza a la teoría de números.

La carrera universitaria de Kronecker fue una repetición en gran escala de sus años del Instituto: asistió a conferencias sobre los clásicos y las ciencias y satisfizo sus inclinaciones hacia la filosofía mediante estudios más profundos de los que hasta entonces se habían hecho, particularmente en el sistema de Hegel. Hacemos notar esto último debido a que algún curioso y competente lector puede intentar buscar el origen de las herejías matemáticas de Kronecker en la confusa dialéctica de Hegel, cuestión que está más allá de la capacidad de quien esto escribe. De todos modos, existe una extraña semejanza entre la heterodoxia de las dudas recientes respecto a la existencia de la Matemática por sí misma, de cuyas dudas la "revolución" de Kronecker fue en parte responsable, y las sutilezas del sistema de Hegel. El candidato ideal para esta empresa podría ser un comunista marxista con un sólido conocimiento de la lógica polivalente polaca, aunque sólo Dios sabe dónde puede hallarse este raro personaje.

Siguiendo la costumbre de los estudiantes alemanes, Kronecker no permaneció todo el tiempo en Berlín. Parte de su carrera fue realizada en la Universidad de Bonn, donde su viejo maestro y amigo Kummer ocupaba la cátedra de Matemática. Durante la permanencia de Kronecker en la Universidad de Bonn, las autoridades universitarias habían emprendido una guerra para suprimir las sociedades estudiantiles, cuyo principal objeto era fomentar la embriaguez, los duelos, y las querellas en general. Con su habitual habilidad, Kronecker se alió secretamente con los estudiantes, e hizo muchos amigos que más tarde le fueron útiles.

La disertación de Kronecker, aceptada por la Universidad de Berlín para concederle el título de Doctor en filosofía, en el año 1845, fue inspirada por la obra de Kummer sobre la teoría de números, y se ocupa de las unidades en ciertos campos de números algebraicos. Aunque el problema tiene extraordinaria dificultad, su naturaleza puede ser comprendida teniendo en cuenta la siguiente explicación, en grandes líneas, del problema *general* de unidades (para *cualquier* campo numérico algebraico, no simplemente para los campos *especiales* que interesaron a Kummer y Kronecker). Este resumen puede también servir para hacer más inteligible algunas de las alusiones del presente capítulo y de los capítulos siguientes a la obra de Kummer, Kronecker y Dedekind en la Aritmética superior. La cuestión es muy sencilla, pero, requiere algunas definiciones preliminares.

Los números enteros comunes 1, 2, 3... son llamados los números enteros racionales (positivos). Si m es cualquier entero racional, será la raíz de una ecuación algebraica de *primer* grado, cuyos coeficientes *son enteros racionales*, o sea

$$x - m = 0.$$

Esta entre otras propiedades, de los enteros racionales sugiere la *generalización* del concepto de enteros a los "números" definidos como raíces de ecuaciones algebraicas. Así, si *r* es una raíz de la ecuación

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

donde las *a* son enteros racionales (positivos o negativos), y si además *r* no satisface una ecuación de grado menor que *n*, cuyos coeficientes son enteros racionales y cuyo primer coeficiente es 1 (como ocurre en la ecuación antes mencionada, o sea el coeficiente de la potencia más elevada, x^n, de x en la ecuación es 1), entonces *r* se llama un *entero alge*braico *de grado n*. Por ejemplo, $1+\sqrt{-5}$ es un entero algebraico de grado 2, debido a que es la raíz de $x^2 - 2x + 6 = 0$, y no es una raíz de cualquier ecuación de grado menor que 2 con coeficiente del tipo prescrito; de hecho $1+\sqrt{-5}$ es la raíz de $x - (1+\sqrt{-5} = 0)$,
y el último coeficiente, $-(1+\sqrt{-5})$, no es un entero racional.
Si en la anterior definición de un *entero algebraico* de grado *n* suprimidos la condición de que el primer coeficiente sea 1, y decimos que puede ser cualquier entero racional (diferente de cero, que es considerado como un entero), una raíz de la ecuación se llama entonces un *número algebraico de* grado *n*. Así ½ $(1+\sqrt{-5})$es un número algebraico de grado 2, pero no es un *entero* algebraico; es una raíz de

$$2x^2 - 2x + 3 = 0.$$

Se introduce ahora otro concepto, el de *campo numérico algebraico de grado n*: si *r* es un número algebraico de grado n, la totalidad de todas las expresiones que pueden ser construidas partiendo de *r* por adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones repetidas (la división por 0 no se define, y por tanto no se ensaya ni permite) se llama el campo numérico algebraico *engendrado por* r, y puede ser denotado por *F(r)*. Por ejemplo, de *r* tendremos $r + r$, o $2r$; de esto y *r* tendremos $2r/r$ ó 2, 2r - 2 ó *r*, $2r \times 2$ ó $2r^2$,etc. El *grado* de este *F [r]* es *n*.
Puede demostrarse que cualquier número de F [r] es de la forma

$$c_0 r^{n-1} + c_1 r^{n-2} + \ldots + c_{n-1}$$

donde las *c* son número racionales, y además cualquier miembro de *F [r]* es un número algebraico de grado no mayor que *n* (de hecho el grado es algún divisor de *n*). Algunos, pero no todos los números algebraicos de *F [r]* serán enteros algebraicos.
El problema central de la teoría de números algebraicos es investigar las leyes de la divisibilidad aritmética de los enteros algebraicos en un campo numérico algebraico de grado *n*. Para que este problema quede definido es necesario establecer exactamente lo que quiere decirse por "divisibilidad aritmética", y para ello debemos comprender el mismo concepto para los enteros *racionales.*
Decimos que un entero racional, *m*, es divisible por otro, *d*, si podemos encontrar un entero racional, *q*, tal que *m = q ´ d; d* (también *q)* es llamado un divisor de *m*. Por ejemplo, 6 es un divisor de 12, pues $12 = 2 \times 6$; 5 no es un divisor de 12, debido a que no existe un entero racional *q* tal que $12 = q \times 5$.

Un *primo* racional (positivo) es un entero racional mayor que 1 cuyos únicos divisores positivos son 1 y el entero mismo. Cuando intentamos extender esta definición a los enteros algebraicos pronto vemos que no encontramos la raíz de la cuestión, y debemos buscar alguna propiedad de los primeros racionales que pueda ser llevada a los enteros algebraicos. Esta propiedad es la siguiente: Si un primo racional p divide el producto $a \times b$ de dos enteros racionales, entonces (es posible demostrarlo) p divide al menos a uno de los factores a, b, del producto.
Considerando la unidad 1 de la Aritmética racional, nos damos cuenta de que 1 tiene la propiedad peculiar de que divide todo entero racional; -1 tiene también la misma propiedad, y 1,- 1 son los únicos enteros racionales que tiene esta propiedad.
Estas y otras claves sugieren algunas cosas muy sencillas que intervienen para establecer las siguientes definiciones como la base para una teoría de la divisibilidad aritmética de los enteros algebraicos. Supongamos que todos los enteros considerados pertenecen a un campo numérico algebraico de grado n.
Si r, s, t, son enteros algebraicos tales que $r = s \times t$, tanto s como t se denominan un divisor de r.
Si j es un entero algebraico que divide todo entero algebraico en el campo ,j se llama una *unidad (en* ese campo). Un campo dado puede contener una infinidad de unidades a diferencia del par 1, -1 para el campo racional, y esta es una de las cosas que siembran dificultades.
Lo siguiente introduce una distinción radical y perturbadora entre enteros racionales y enteros algebraicos de grado mayor que 1.
Un entero algebraico, que no sea una unidad, cuyos solos divisores son unidades y el entero mismo, se llama *irreducible.* Un entero algebraico irreducible que tiene la propiedad de que si divide el producto de dos enteros algebraicos dividirá al menos uno de los factores, se llama un entero algebraico *primo.* Todos los primos son irreducibles, pero no todos los irreducibles son primos en *algunos* campos numéricos algebraicos, por ejemplo en F[$\sqrt{-5}$],como se verá en seguida. En la Aritmética común de 1,2,3... los irreducibles y los primos son lo mismo.
En el capítulo sobre Fermat hemos mencionado el teorema fundamental de la Aritmética (racional): un entero racional es el producto de primos (racionales) *en una sola forma.* De este teorema brota toda la intrincada teoría de la divisibilidad para los enteros racionales. Por desgracia, el teorema fundamental *no* puede mantenerse en todos los campos numéricos algebraicos de grado mayor que uno, y el resultado es el caos.
Para citar un ejemplo (es el ejemplo corrientemente citado en los manuales sobre la cuestión), en el campo F($\sqrt{-5}$) tenemos

$$6 = 2 \times 3 = (1+ \sqrt{-5}) \times (1 - \sqrt{-5});$$

y cada uno de 2,3,1, + $\sqrt{-5}$,1 - $\sqrt{-5}$, es un primo en este campo (como puede ser comprobado con cierta facilidad), de modo que 6, en este campo, *no es únicamente* descomponible en un producto de primos.
Podemos decir aquí que Kronecker venció esta dificultad por un método muy bello que es demasiado complicado para poderlo explicar sin tecnicismo, y que Dedekind consiguió lo mismo por un método totalmente diferente, que es mucho más fácil de comprender, y al que hemos de referirnos cuando consideremos la vida de este investigador. El método de Dedekind es el más empleado actualmente, pero esto no significa que el de Kronecker sea menos importante ni que goce de menor favor cuando la Matemática se familiarice con él.

En su disertación de 1845 Kronecker abordó la teoría de la divisibilidad en ciertos campos especiales, los definidos por las ecuaciones que surgen de la fórmula algebraica del problema de Gauss para dividir la circunferencia en *n* partes iguales, o, lo que es lo mismo, construir un polígono regular de *n* lados.
Podemos ahora terminar una parte de la exposición iniciada por Fermat. Luchando para demostrar el último teorema de Fermat, quien enunció que

$$x^n + y^n = z^n$$

es imposible en enteros racionales *x, y, z* (no cero) si *n* es un entero mayor que 2, los matemáticos dieron lo que parece un paso perfectamente natural, descomponiendo la primera parte de la ecuación $x^n + y^n$, en sus factores de primer grado (como se explica en el segundo curso del Álgebra elemental). Esto condujo a una agotadora investigación del campo numérico algebraico antes mencionado en relación con el problema de Gauss, después de haberse cometido errores graves, pero fácilmente comprensibles.
El problema estaba al principio rodeado de trampas, en las cuales cayeron muchos competentes matemáticos, incluso uno de los grandes, Cauchy. Este autor aceptó como natural que en el campo numérico algebraico correspondiente debe mantenerse el teorema fundamental de la Aritmética. Después de algunas interesantes, pero prematuras comunicaciones a la Academia Francesa de Ciencias comprendió su error. Como era un hombre inquieto, a quien le interesaba gran número de estos problemas al mismo tiempo, Cauchy abandonó la cuestión, sin realizar el gran descubrimiento que estaba dentro de la capacidad de su prolífico genio, y abandonó el campo a Kummer. La dificultad central era grave: había una especie de "enteros", los referentes al campo que desafiaban al teorema fundamental de la Aritmética. ¿Cómo conseguir que obedecieran a la ley?
La solución de este problema por la invención de un tipo totalmente nuevo de "números" adecuado a la situación, que restablecen automáticamente el teorema fundamental de la Aritmética, constituye, junto con la creación de la Geometría no euclidiana, una de las conquistas científicas sobresalientes del siglo XIX, y quizá sea uno de los descubrimientos matemáticos más importantes de toda la historia. La creación de los nuevos "números", llamados "números ideales", fue obra de Kummer en 1845. Estos nuevos números no estarían construidos para todos los campos numéricos algebraicos, sino sólo para aquellos campos que se originan en la división del círculo.
Kummer se enredó en la red donde cayó Cauchy, y durante cierto tiempo creyó que había demostrado el último teorema de Fermat. Luego, Dirichlet, a cuya crítica fue sometida la supuesta prueba, señaló, por medio de un ejemplo, que el teorema fundamental de la Aritmética, en oposición a la afirmación tácita de Kummer, *no* se cumple en el campo correspondiente. Este fracaso de Kummer constituyó una de las cosas más afortunadas que han sucedido en la Matemática. Lo mismo que en el error inicial de Abel en la cuestión de la quíntica general, Kummer volvió al buen camino e inventó sus "números ideales".
Kummer, Kronecker y Dedekind con su invención de la teoría moderna de los números algebraicos, ampliando el alcance de la Aritmética *ad infinitum,* y llevando las ecuaciones algebraicas dentro de los límites del número, hicieron por la Aritmética superior y la teoría de ecuaciones algebraicas lo que Gauss, Lobatchewsky, Johann Bolyai, y Riemann hicieron por la Geometría al emanciparla de la. estrecha esclavitud de Euclides. Y lo mismo que los inventores de la Geométrica no euclidiana revelaron vastos y hasta entonces insospechados horizontes a la Geometría y a la ciencia física, así también los creadores de la teoría de números algebraicos

arrojaron una luz completamente nueva que iluminó toda la Aritmética y aclaró las teorías de ecuaciones, de los sistemas de curvas y superficies algebraicas y la verdadera naturaleza del número mismo sobre la firme base de claros y simples postulados.
La creación de "ideales", la inspiración de Dedekind basada en la visión de Kummer de los "números ideales", renovó no sólo la Aritmética, sino toda el Álgebra que surge de la teoría de ecuaciones y de los sistemas algebraicos de tales ecuaciones, y pudo verse que era también una clave, en la que podía confiarse, para la significación interna de la "Geometría enumerativa"[1] de Plücker, Cayley y otros, que absorbió una buena cantidad de las energías de los geómetras del siglo XIX ocupados con las intersecciones de las redes de curvas y superficies. Y finalmente, si la herejía de Kronecker contra el análisis de Weierstrass (como más tarde observaremos) llega a ser algún día una anticuada ortodoxia, como ocurre más pronto o más tarde con todas las herejías que no son totalmente absurdas, estas renovaciones de nuestros enteros familiares, 1, 2, 3..., sobre los que todo Análisis se esfuerza en basarse, darán en definitiva nuevos alcances al Análisis, y la especulación pitagórica podrá contemplar propiedades generadoras del "número" que Pitágoras jamás pudo soñar en toda su indómita filosofía.
Kronecker inició este difícil y bello campo de los números algebraicos el año 1845, cuando tenía veintidós, con su famosa disertación *De Unitatibus Complexis*. Las unidades particulares de que trataba eran aquellas que en los campos numéricos algebraicos surgen del problema gaussiano de la división de la circunferencia en *n* arcos iguales. Por este estudio obtuvo su titulo de doctor en filosofía.
Las Universidades alemanas tenían la laudable costumbre de que el candidato triunfante, al obtener su título de doctor, invitara a una reunión, casi siempre consistente en una fiesta en la cervecería, a sus jueces. En tales fiestas era habitual burlarse de los exámenes haciendo una serie de ridículas preguntas seguidas de respuestas aún más ridículas. Kronecker invitó prácticamente a toda la Facultad, incluyendo al decano, y el recuerdo de aquella fiesta para celebrar la obtención de su título fue, según decía posteriormente, el más feliz de su vida.
En un aspecto, al menos, Kronecker y su enemigo científico Weierstrass eran muy semejantes. Ambos eran excelentes caballeros. Pero en todas las otras cosas su diferencia era casi cómica. El clímax de la carrera de Kronecker fue su prolongada guerra matemática contra Weierstrass, en la que no se daba ni pedía cuartel. Uno era un algebrista innato, el otro había hecho casi una revolución del Análisis. Weierstrass era alto, Kronecker diminuto pero recio, y aunque su altura no llegaba a metro y medio sus proporciones eran perfectas. Después de sus días de estudiante, Weierstrass abandonó la esgrima; Kronecker fue siempre excelente gimnasta y nadador, y más tarde buen alpinista.
Los testigos de las batallas entre esta incomparable pareja cuentan cómo el voluminoso enemigo era aturdido por la tenacidad de su pequeño contrincante, de quien quería deshacerse como un buen perro de San Bernardo quiere ahuyentar una molesta mosca. Kronecker excitaba a Weierstrass con sus ingeniosos ataques, hasta que Weierstrass huía a grandes zancadas, llevando sobre sus talones a Kronecker, quien continuaba hablando como un loco. Pero, pese a sus diferencias científicas, los dos eran buenos amigos, y ambos eran grandes matemáticos, sin un ápice del complejo de "gran hombre" que muchas veces infla .a los supuestos poderosos.

[1] Un problema de este tipo es el siguiente: Una curva algebraica puede también volverse sobre ella, o colocarse donde la curva cruza sus tangentes; dado el grado de la curva ¿cuántos de esos puntos existen? 0 si no podemos responder a esta pregunta ¿qué ecuaciones deben mantenerse que relacionen el número de éstos y de otros puntos excepcionales? Lo mismo puede decirse para las superficies.

Kronecker tuvo la suerte de tener un tío rico influyente en los bancos, que también se ocupaba de grandes empresas agrícolas. Todos estos negocios cayeron en las manos del joven Kronecker a la muerte de su tío, poco después de que el matemático en embrión había obtenido su título a la edad de 22 años. Los ocho años siguientes (1845 a 1853) fueron empleados en la administración de las propiedades y en poner en orden los negocios, cosa que Kronecker hizo con gran tenacidad y excelente resultado. Para poder administrar eficazmente sus propiedades rurales tuvo que estudiar los principios de la agricultura.

En 1848, cuando tenia 25 años, el joven y enérgico hombre de negocios se enamoró de su prima Fanny Prausnitzer, hija de su difunto y poderoso tío, y se casó con ella. Tuvo seis hijos, cuatro de los cuales sobrevivieron a sus padres. El matrimonio Kronecker fue muy feliz, y él y su mujer, bella y con talento, educaron a sus hijos con la mayor devoción. La muerte de la mujer de Kronecker, pocos meses antes de su última enfermedad, fue el golpe que le derrumbó.

Durante los ocho años dedicados a los negocios Kronecker no publicó nada respecto a cuestiones matemáticas. Pero no quedó estancado matemáticamente, según lo demuestra la publicación, en 1853, de un trabajo fundamental sobre la solución algebraica de las ecuaciones. A pesar de su actividad como hombre de negocios, Kronecker mantuvo una viva correspondencia científica con su antiguo maestro Kummer, y, en cuanto pudo escapar de ese género de vida, visitó París, (1853), donde conoció a Hermite y a otros importantes matemáticos franceses. Jamás interrumpió su comunicación con el mundo científico cuando las circunstancias le obligaron a cuidar sus intereses, y pudo mantener vivos sus conocimientos, haciendo de la Matemática su diversión favorita.

En 1853, cuando se publicó la memoria de Kronecker sobre la resolución algebraica de las ecuaciones (la naturaleza del problema fue discutida en los capítulos sobre Abel y Galois), la teoría de ecuaciones de Galois era comprendida por muy pocos. La manera cómo abordó Kronecker el tema es característica de su inteligente labor. Kronecker había comprendido la teoría de Galois, y posiblemente fue el único matemático de la época que logró penetrar profundamente en las ideas de dicho autor. Liouville se contentó con una visión de la teoría que le capacitó para completar inteligentemente algunos de los trabajos de Galois.

Una característica de la forma cómo Kronecker abordaba las cuestiones fue su minuciosidad comprensiva. En ésta, como en otras investigaciones en Álgebra y en la teoría de números, Kronecker tomó el oro refinado de sus predecesores, lo pulió como un elegante joyero, añadió gemas propias, e hizo con todo el precioso material una obra de arte que llevaba el inconfundible sello de su individualidad artística. Le gustaban las cosas perfectas; algunas de sus páginas muestran muchas veces el completo desarrollo de un resultado aislado con toda sus implicaciones, pero no sobrecargan el tema principal con excesivos detalles. En consecuencia, hasta el más breve de sus trabajos ha dado lugar a descubrimientos importantes de sus sucesores, y sus investigaciones más largas constituyen inagotables minas de bellos problemas.

Kronecker fue lo que se llama un "algorista" en la mayor parte de sus obras. Le gustaba exponerla cuestión mediante fórmulas concisas donde automáticamente iban apareciendo las fases sucesivas, y cuando se llegaba a la cuestión más importante era posible volver atrás en todo el razonamiento, y ver la aparente inevitabilidad de la conclusión surgida de las premisas. Los detalles auxiliares eran crudamente podados hasta que aparecía el nudo principal de la cuestión, con todo su vigor y simplicidad. Brevemente, Kronecker era un artista que utilizaba las fórmulas matemáticas como su medio de expresión.

Después que los trabajos de Kronecker sobre la teoría de Galois, el tema pasó de ser la propiedad privada de unos pocos a constituir la propiedad común de todos los algebristas, y Kronecker procedió tan artísticamente que la siguiente fase de la teoría de ecuaciones se puede atribuir a él.

Su objetivo en Álgebra, como el de Weierstrass en Análisis, era buscar el camino natural, una cuestión de intuición y de gusto más que de definición científica, para llegar al corazón de sus problemas.

El mismo espíritu artístico y la misma tendencia a la unificación aparece en otro de sus más celebrados trabajos que tan sólo ocupa un par de páginas en sus obras completas, *Sobre la resolución de la ecuación general de quinto grado,* que fue publicado primeramente en 1858. Hermite, recordaremos, dio la primera solución, por medio de las funciones elípticas (modulares), en el mismo año. Kronecker alcanzó la solución de Hermite, o lo que es prácticamente lo mismo, aplicando las ideas de Galois al problema, dando lugar a que el milagro pareciera "más natural". En otro trabajo (1861), también breve, en el cual gastó la mayor parte de sus horas durante cinco años, volvió al tema, y buscó las razones de *porqué* la ecuación general de quinto grado se puede resolver en la forma conocida, dando así un paso más allá de Abel, quien estableció la cuestión de la resolución "por radicales".

Gran parte de la obra de Kronecker tiene marcado matiz aritmético, tanto de Aritmética racional como de las más amplia Aritmética de los números algebraicos. En efecto, si su actividad matemática ha tenido una clave directriz, puede decirse que su deseo, quizá subconsciente, fue aritmetizar toda la Matemática, desde el Álgebra al Análisis. Dios hizo los números enteros, dijo, el resto es obra del hombre. La pretensión de Kronecker de que el Análisis debía ser reemplazado por la Aritmética finita fue la raíz de su desacuerdo con Weierstrass. La aritmetización universal puede ser un ideal demasiado estrecho para la frondosidad de la Matemática moderna, pero al menos tiene el mérito de la mayor claridad.

La Geometría jamás fue seriamente abordada por Kronecker. El período de la especialización ya había progresado lo bastante cuando Kronecker realizó su labor, y probablemente sería imposible para cualquier hombre haber producido una obra de tipo tan perfecto como la realizada por Kronecker como algebrista y en su tipo peculiar de Análisis, y al mismo tiempo descubrir otras cosas de importancia en otros campos. La especialización ha sido frecuentemente condenada, pero tiene sus virtudes.

Un rasgo característico de muchos de los descubrimientos técnicos de Kronecker es la perfección con que teje los tres hilos de sus disciplinas favoritas, la teoría de números, la teoría de ecuaciones y las funciones elípticas, para formar una bella trama en la que se revelan simetrías imprevistas y muchos detalles que pasaron inadvertidos para otros. Cada uno de los instrumentos que empleó parecía que había sido designado por el destino para la más eficaz función de los demás. No contento con aceptar esta misteriosa unidad como un simple misterio, Kronecker buscó y encontró la estructura esencial en la teoría de Gauss de las formas cuadráticas binarias, donde lo primero y principal es investigar las soluciones en números enteros de ecuaciones indeterminadas de segundo grado con dos incógnitas.

La gran obra de Kronecker en la teoría de números algebraicos no forma parte de esta urdimbre. También se separó algunas veces de sus aficiones principales cuando, siguiendo la moda de su época, se ocupó de los aspectos matemáticos puros de ciertos problemas (en la teoría de la atracción así como en la gravitación newtoniana) de la física matemática. Sus contribuciones en este campo fueron de interés matemático más que de interés físico.

Hasta la última década de su vida, Kronecker fue un hombre libre, sin obligaciones. Sin embargo, aceptó voluntariamente deberes científicos, por los que no recibió remuneración alguna, cuando hizo uso de su privilegio como miembro de la Academia de Berlín para pronunciar conferencias en la Universidad berlinesa. Desde 1861 a 1883 organizó cursos regulares en la Universidad, principalmente sobre sus investigaciones personales, después de las explicaciones necesarias. En 1883, Kummer, entonces en Berlín, se retiró, y Kronecker ocupó el puesto de su antiguo maestro

como profesor ordinario. En este período de su vida viajó mucho y participó con frecuencia en las reuniones científicas celebradas en Gran Bretaña, Francia y Escandinavia.
Durante toda su carrera como profesor de Matemática, Kronecker rivalizó con Weierstrass y otras celebridades, cuyos temas eran más populares que los suyos. El Álgebra y la teoría de números jamás han atraído tanto al público como la Geometría y el Análisis, posiblemente debido a que se aprecian mejor las relaciones de estos últimos con la ciencia física.
Kronecker toleró este aristocrático aislamiento sin repugnancia y hasta con cierta satisfacción. Sus bellas y claras introducciones a sus cursos hacían creer erróneamente a sus oyentes que las subsiguientes lecciones serían fáciles de comprender. Esta creencia se evaporaba rápidamente a medida que el curso progresaba, y después de tres o cuatro sesiones tan solo quedaban algunos fieles y obstinados oyentes, mientras la mayor parte desertaba para ir a escuchara Weierstrass. Kronecker se regocijaba y decía en broma que debía colocarse una cortina
después de las dos primeras filas de sillas, pues así el conferenciante y los oyentes gozarían de mayor intimidad. Los pocos discípulos que conservaba le seguían devotamente, paseando con él para continuar las discusiones comenzadas en el aula, y con frecuencia era posible asistir en las pobladas aceras de las calles de Berlín al divertido espectáculo de ver a un hombrecillo muy excitado, que hablaba con todo su cuerpo, especialmente con las manos, a un grupo de estudiantes que obstaculizaba el tránsito. Su casa estaba siempre abierta a sus discípulos, cosa que producía gran alegría al maestro, y su generosa hospitalidad constituyó una de las más grandes satisfacciones de su vida. Varios de sus discípulos llegaron a ser eminentes matemáticos, pero su "escuela" era el mundo entero, y no hacía esfuerzo alguno por ampliar y formar una escuela artificial.
Esta fue la característica de la obra independiente de Kronecker. En una atmósfera de confiada creencia en la solidez del Análisis, Kronecker asumió el antipático papel del filósofo que duda. No son muchos los grandes matemáticos que han tomado en serio la filosofía; en efecto, la mayoría parece haber considerado con repugnancia las especulaciones filosóficas, y cualquier duda epistemológica que afectara la solidez de su obra ha sido casi siempre ignorada o impacientemente descartada.
Con Kronecker la cuestión era diferente. La parte más original de su obra, donde fue un verdadero precursor, es el desarrollo natural de sus inclinaciones filosóficas. Su padre, Werner, Kummer, y sus amplias lecturas filosóficas, influyeron sobre él para que tuviera una perfecta visión crítica de todos los conocimientos humanos, y cuando contemplaba la Matemática desde este discutido punto de vista, no la excluía porque se tratase de un campo de su particular predilección, sino que la infundía un acre pero beneficioso escepticismo. El hombre que duda, no se dirige a sí mismo ni a los que viven, sino, como Kronecker decía, "a quienes vendrán después de mí". En la actualidad esos sucesores han llegado, y debido a sus esfuerzos unidos, aunque con frecuencia se hayan producido contradicciones, comenzamos a apreciar claramente la naturaleza y significación de la Matemática.
Weierstrass (Capítulo XXII) había construido el Análisis matemático sobre su concepto de número irracional definido por infinitas sucesiones de números racionales. Kronecker no sólo discutió con Weierstrass;, hubiera atraído a Eudoxio. Para él, como para Pitágoras, únicamente "existen" los números enteros creados por Dios 1, 2, 3,... El resto es un vano ensayo de la humanidad para corregir al Creador. Weierstrass, en cambio, creía que al menos había hecho la raíz cuadrada de 2 tan comprensible y tan fácil de tratar como el 2 mismo; Kronecker negaba que la raíz cuadrada de 2 "existía", y afirmaba que es imposible razonar consecuentemente acerca de la construcción de Weierstrass respecto a esta raíz o a cualquier otro irracional. Ni sus colegas

más ancianos ni el joven a quien Kronecker se dirigía dieron a sus revolucionarias; ideas una entusiasta bienvenida.

Weierstrass mismo parece que se sentía incómodo; ciertamente se creía ofendido. Su gran emoción se manifiesta en una tremenda sentencia alemana[2] semejante a una fuga, cuya traducción es muy difícil. "Pero lo peor de ello es, afirma Weierstrass, que Kronecker usa su autoridad para proclamar que todos los que han intervenido ahora para establecer la teoría de funciones son pecadores ante el Señor. Cuando un individuo curioso y excéntrico como Christoffel [el hombre cuya obra algo olvidada iba a ser, años después de su muerte, un importante instrumento en la Geometría diferencial que en la actualidad se emplea en la matemática de la relatividad], dice que en 20 ó 30 años la actual teoría de funciones quedará enterrada, y que la totalidad del Análisis será referido a la teoría de las: formas, replicamos encogiéndonos de hombros. Pero cuando Kronecker pronuncia el siguiente veredicto, que repito *palabra* por *palabra: "Si* el tiempo y la salud me lo permiten yo mismo mostraré al mundo matemático que no sólo la Geometría sino también la Aritmética puede señalar el camino al Análisis, y seguramente un camino más riguroso. Si no puedo hacerlo por mí mismo, lo harán los que vengan después de mí, y se reconocerá la inexactitud de todas las conclusiones en que el llamado Análisis se basa al presente", tal veredicto, pronunciado por un hombre cuyo gran talento y cuya obra matemática admiro tan sinceramente y con tanto placer como todos sus colegas, no sólo es humillante para quienes él pretende que abjuren de su conocimientos y que renuncien a la esencia de lo que ha constituido el objeto de sus pensamientos y de su incansable labor, sino que también es una invitación directa a la generación más joven para que deserte de sus actuales conductores y se afilien como discípulos de un nuevo sistema que *debe* ser fundado. Ciertamente esto es triste, y me llena de gran amargura ver a un hombre cuya gloria no tiene manchas, dejarse impulsar por sentimientos indignos de su grandeza a manifestaciones cuyo efecto injurioso sobre los demás parece no percibir."

"Pero bastantes de estas cosas a las que aludo tan sólo las expongo para explicaros porqué no experimento el mismo goce que antes en mis enseñanzas aunque mi salud me permita continuar mi labor algunos años más. Pero no debéis hablar de ello; no les gustaría a otras personas que no me conocen como me conocéis, para ver en lo que digo la expresión de un sentimiento que es de hecho extraño a mí".

Weierstrass tenía 70 años, y cuando escribía estas palabras su salud era precaria. De haber vivido ahora, hubiera visto su gran sistema floreciendo aun, como el proverbial laurel siempre verde. Las dudas de Kronecker han estimulado el examen crítico de los fundamentos de toda la Matemática, pero no han podido destruir el Análisis. Si alguna cosa de singular significación ha de ser reemplazada por algo más firme pero aun desconocido, parece probable que sea una buena parte de la obra de Kronecker pues la critica que él preveía ha dejado al descubierto puntos débiles que él no sospechó. El tiempo nos hace necios a todos. Nuestro solo consuelo es que más lo serán los que vengan detrás de nosotros.

La "revolución" de Kronecker como sus contemporáneos llamaron a su subversivo ataque al Análisis hacía desaparecer todo de la Matemática, salvo los números enteros positivos. La Geometría desde Descartes ha sido principalmente una cuestión de Análisis aplicada a ordenar pares, ternas. de números reales (los "números" que corresponden a las distancias medidas sobre una determinada línea recta desde un punto fijo sobre la línea). De aquí podría caer bajo el imperio del programa de Kronecker. Un concepto tan familiar como el de un entero negativo, por

[2] En una carta a Sonja Kowalewsky, 1885

ejemplo - 2, no aparecería en la Matemática que Kronecker profetizó, ni tampoco las fracciones comunes.
Las irracionales, como Weierstrass señala, producían una especial repugnancia a Kronecker. Hablar de que $x^2 - 2 = 0$ tiene una raíz carecía de significación. Todas esas repugnancias y objeciones no tienen, como es natural, significación a no ser que pudieran ser reemplazadas por un programa definido que sustituyera al rechazado.
Kronecker realmente hizo esto, al menos en grandes líneas, y mostró que todo el Álgebra y la teoría de números, incluyendo los números algebraicos, pueden ser reconstruidos de acuerdo con dicha exigencia. Para eliminar $\sqrt{-1}$, por ejemplo, tan sólo necesitamos sustituir esta expresión temporalmente por una letra, o sea i, y considerar polinomios qué contengan i y otras letras, o sea $x, y, ...$ Luego manipularemos estos polinomios como en Álgebra elemental, tratando i como cualquiera de las otras letras, hasta el último paso, cuando todo polinomio que contenga i se divida por $i^2 + 1$ y se descartan todas las cosas salvo el resto obtenido de esta división. Quien recuerde algo de la Geometría elemental puede fácilmente convencerse de que esto nos conduce a todas las propiedades que nos son familiares de los misteriosamente mal llamados números "imaginarios" de los libros de texto. De una manera semejante, los negativos y las fracciones y todos los números algebraicos (que no sean los enteros racionales positivos) son eliminados de las Matemáticas, si así se desea, y sólo permanecen los benditos enteros positivos. La inspiración acerca de cómo eliminar $\sqrt{-1}$ se remonta a Cauchy en 1847. Este fue el germen del programa de Kronecker.
Quienes no sienten simpatía por la "revolución" de Kronecker, la llaman un putsch, que es algo más parecido a una reyerta entre, borrachos que a una verdadera revolución. De todos modos, ha llevado en los últimos años a dos movimientos de crítica constructiva en toda la Matemática: la necesidad de que sea dada o demostrada posible una construcción en un número finito de etapas para cualquier "número" u otra "entidad" matemática cuya "existencia" se indica, y la desaparición en la Matemática de todas las definiciones que no puedan ser expuestas explícitamente en un número finito de palabras. La insistencia sobre estas exigencias ha hecho mucho para aclarar nuestro concepto de la naturaleza de la Matemática, pero aun queda mucho por hacer. Como esta obra está aun en marcha demoraremos su ulterior consideración hasta ocuparnos de Cantor, pues entonces será posible citar ejemplos.
El desacuerdo de Kronecker con Weierstrass no deja la desagradable impresión que produciría si ignoramos el resto de la vida generosa de Kronecker. Kronecker no tuvo la intención de herir a su amable compañero; dejaba correr su lengua en el calor de una discusión puramente matemática, y Weierstrass, cuando estaba de buen humor, se reía de los ataques, sabiendo bien que del mismo modo como él había perfeccionado la obra de Eudoxio, sus sucesores probablemente perfeccionarían la suya. Es posible que si Kronecker hubiera tenido treinta centímetros más de estatura no se hubiera visto obligado a vociferar cuando hacía sus objeciones al Análisis. Gran parte de la disputa puede interpretarse suspicazmente como debida a una manifestación de un injustificado complejo de inferioridad.
La reacción de muchos matemáticos a la "revolución" de Kronecker fue resumida por Poincaré cuando dijo que Kronecker fue capaz de realizar una excelente obra matemática debido a que, frecuentemente olvidó su propia filosofía matemática. Como no pocos epigramas, este es lo suficientemente falso para ser ingenioso.
Kronecker murió de una afección bronquial, en Berlín, el 29 de diciembre de 1891, teniendo 69 años.

Capítulo Vigesimosexto
ANIMA CANDIDA

RIEMANN

Un geómetra como Riemann pudo casi haber previsto las características más importantes del mundo actual.

A. S. Eddington

Refiriéndose a Coleridge, se ha dicho que escribió poca poesía de primer orden, pero que esa poca está hecha de oro. Lo mismo podría decirse de Bernhard Riemann, cuyos frutos matemáticos apenas bastan para llenar un volumen en octavo. También podría decirse que Riemann revolucionaba todo aquello que tocaba. Uno de los matemáticos más originales de los tiempos modernos, Riemann, heredó por desgracia una precaria constitución, y murió antes de que madurase una décima parte de la dorada cosecha de su fértil cerebro. Si hubiera nacido un siglo más tarde, es probable que la ciencia médica hubiera sido capaz de alargar su vida veinte o treinta años y la Matemática no hubiera tenido que esperar la aparición de un sucesor.

Georg Friedrich Bernhard Riemann, hijo de un pastor luterano, el segundo de seis hermanos (dos hermanos y cuatro hermanas), nació en la pequeña aldea de Breselenz, en Hanover, Alemania, el 17 de septiembre de 1826. Su padre combatió en las guerras napoleónicas, y cuando abandonó este modo de vivir por otro menos bárbaro, se casó con Charlotte Ebell hija de un modesto abogado. En el año 1826, Hanover no gozaba de una vida próspera, y las condiciones de un oscuro pastor con una mujer y seis hijos que alimentar y vestir no eran en realidad envidiables. Algunos biógrafos pretenden, quizá con justicia, que la delicada salud y las muertes prematuras de muchos de los hijos de Riemann fueron el resultado de la desnutrición de su juventud, y no debidas a circunstancias realmente ingentes. La madre murió también antes de que sus hijos llegaran a la edad adulta.

A pesar de la pobreza, la vida de su hogar era feliz, y Riemann siempre mantuvo el más cálido afecto, y una intensa nostalgia cuando estaba ausente, para toda su cariñosa familia. Desde sus primeros años fue un alma tímida y desconfiada, con un terrible horror ante la idea de hablar en público o de atraer la atención sobre sí mismo. En su vida posterior esta crónica timidez constituyó un serio obstáculo, ocasionándole muchos tormentos, hasta que pudo vencerla por una diligente preparación cuando tenía que hacer una presentación en público. La simpática timidez de la infancia y de la adolescencia de Riemann atraía a todo el que le conoció, y estaba en extraño contraste con la audacia de su pensamiento científico maduro. Reconociéndose supremo en el mundo de su propia creación, se daba cuenta de su transcendental capacidad, y no temía a nadie, real o imaginario.

Siendo todavía niño, el padre pasó al curato de Quickborn. Allí, el joven Riemann recibió de su padre, que parecía ser un excelente maestro, su primera instrucción. Desde las primeras lecciones Bernhard mostró un deseo insaciable de aprender. Las primeras cosas que le interesaron fueron las históricas, particularmente la trágica y romántica historia de Polonia. Cuando tenía cinco años Bernhard no dejaba en paz a su padre, pidiéndole que le narrara una y otra vez la leyenda de las luchas heroicas, y algunas veces ligeramente fatuas, de la infeliz Polonia, por la libertad y por la "autodeterminación", empleando la significativa frase de Woodrow Wilson.

La Aritmética, cuyo estudio comenzó a los 6 años, dio lugar a que se revelara pronto su ingénito genio matemático. Bernhard no sólo resolvía todos los problemas que se le presentaban, sino que inventaba casos más difíciles para exasperar a sus hermanos y hermanas. Ya el impulso creador en la Matemática dominaba la mente del muchacho. Teniendo 10 años comenzó a recibir lecciones de Aritmética y Geometría superior de un maestro profesional, un tal Schulz, que parecía buen pedagogo. Schulz pronto se encontró por debajo de su discípulo, que con frecuencia obtenía mejores soluciones que él.

A los 14 años Riemann fue a vivir con su abuela a Hanover, donde ingresó en la escuela secundaria, en el tercer grado superior. Aquí comenzó a sentir por primera vez su soledad. Su timidez hacía de él el blanco de las bromas de sus compañeros, y ello le impulsó a concentrarse sobre sí mismo. Después de un retroceso temporal, su comportamiento en el Instituto fue excelente, pero él no se permitía lujo alguno, y su único solaz era la compra de algunos pequeños regalos, adquiridos con sus ahorros, para enviarlos a sus padres, hermanos y hermanas en los días de sus cumpleaños. En una ocasión inventó y preparó como regalo para sus padres un calendario perpetuo muy original, que produjo el asombro de sus incrédulos compañeros. A la muerte de su abuela, dos años más tarde, Riemann fue llevado al Instituto de Lüneburg, donde estudió hasta que logró la preparación necesaria para ingresar en la Universidad de Göttingen, teniendo 19 años. Lüneburg estaba cerca del hogar de Riemann, quien aprovechaba así todas las oportunidades para poder gozar del calor de su casa. Estos años de educación secundaria, cuando su salud era aún buena, fueron los más felices de su vida. Los viajes de ida y vuelta entre el Instituto y Quickborn exigían un esfuerzo a su salud, pero, a pesar de las angustias de la madre, Riemann continuó realizando estos excesos para poder estar con su familia el mayor tiempo posible.

Cuando todavía estaba en el Instituto, Riemann tenía ya el prurito por la perfección, que más tarde habría de demorar sus publicaciones científicas. Este defecto, si lo es, le causó grandes dificultades en sus ejercicios escritos, y al principio hasta pareció dudoso que pudiera triunfar en sus exámenes. Pero este mismo rasgo fue más tarde, la causa de la forma acabada de dos de sus obras maestras, una de las cuales fue considerada por Gauss como perfecta. Más tarde las cosas mejoraron, cuando Seyffer, el maestro de hebreo, recibió a Riemann en su propia casa como pupilo.

Los dos estudiaron juntos hebreo. Riemann hacía más de lo que podía, pues el futuro matemático deseaba en aquellos días satisfacer los deseos de su padre y ser un gran predicador, como si el pobre Riemann, con su timidez, pudiera haber subido al púlpito para desafiar al infierno y hablar de la condenación, o de la redención en el Paraíso. El mismo Riemann estaba satisfecho con sus piadosos planes, y aunque jamás preparó un sermón, empleó sus talentos matemáticos para intentar la demostración, a la manera de Spinoza, de la verdad del Génesis. Sin importarle su fracaso, el joven Riemann conservó su fe, y continuó siendo toda su vida un sincero cristiano. Como su biógrafo (Dedekind) afirma: "Evitó reverentemente alterar la fe de los demás; para él lo principal en la religión era el autoexamen diario". Al terminar el curso de la Escuela secundaria todos estaban conformes, hasta el propio Riemann, de que el Todopoderoso no podría utilizarlo

para derrotar al demonio, pero podría emplearle provechosamente para la conquista de la naturaleza. Así, una vez más, como en los casos de Boole y Kummer, *ad majoram Dei gloriam.*
Habiendo observado el director del Instituto, Schmalfuss, el talento de Riemann para la Matemática, le permitió entrar en su biblioteca privada, librándole de asistir a la clase de Matemática. De esta forma Riemann descubrió sus aptitudes ingénitas para esta ciencia, pero su incapacidad para darse cuenta inmediatamente de la magnitud de su talento es tan característico de su casi patológica modestia que resulta ridículo.
Schmalfuss sugirió a Riemann la idea de que retirara algún libro matemático de la biblioteca, para que lo estudiara en su casa, y a Riemann le pareció excelente la idea con tal de que el libro no fuera demasiado fácil. Por indicación de Schmalfuss eligió la *Théorie des Nombres* (Teorías de números), de Legendre. Se trata, nada menos, que de una obra de 850 páginas, en cuarto mayor, y llena de razonamientos complicados. Seis días más tarde Riemann devolvió el libro. "¿Cómo ha podido leerlo tan pronto?" preguntó Schamalfuss. Sin contestar directamente, Riemann expresó su aprecio por la obra clásica de Legendre. "Es ciertamente un libro maravilloso. Lo he comprendido", y en efecto era verdad. Algún tiempo más tarde, al someterse al examen, respondió perfectamente, aunque hacía ya meses que no había vuelto a ver el libro.
No hay duda de que este es el origen de la afición de Riemann por el enigma de los números primos. Legendre tiene una fórmula empírica para calcular el número aproximado de primos menor que cualquier número dado. Una de las obras más profundas y más sugestivas de Riemann (aunque sólo tiene ocho páginas) se refiere al mismo tema general. En efecto, "la hipótesis de Riemann", que se origina en su ensayo para mejorar la obra de Legendre, es actualmente uno de los desafíos notables, si no el más notable, a los matemáticos puros.
Anticipándonos ligeramente a lo que luego diremos, podemos exponer aquí lo que es esta hipótesis. Se plantea en la famosa memoria de *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse.* (Sobre el número de números primos inferiores a uno dado) impresa en la publicación mensual de la Academia de Berlín, noviembre 1859, cuando Riemann tenía 33 años. El problema se refiere a encontrar una fórmula que dé los primos que existen menores que un número dado *n.* Al intentar resolver esta cuestión, Riemann fue llevado a una investigación de la serie infinita

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\ldots$$

en la que *s* es un número complejo, o sea $s = u + iv$ ($i = \sqrt{-1}$)donde *u* y *v* son números reales, elegidos de modo que la serie sea convergente. Con este requisito, la serie infinita es una función de *s*, o sea ζ(s) (la zeta griega ζ, se usa siempre para denotar esta función que se llama "función zeta de Riemann"); y como *s* varía, ζ(s) continuamente toma diferentes valores. *¿Para qué valores de s será z*(*s*) *cero?* Riemann conjeturó que *todos* esos valores de *s* para los cuales *n* está entre 0 y 1 son de la forma

$$½ + iv$$

o sea que *todos tienen su parte real igual a* ½.
Esta es la famosa hipótesis. Pruebe o no pruebe algo, se cubrió de gloria, e incidentalmente resolvió muchas cuestiones extraordinariamente difíciles en la teoría de números primos, en otras partes de la Aritmética superior y en algunos campos del análisis. La opinión de los especialistas

está en favor de la verdad de la hipótesis. En 1914, el matemático inglés G. H. Hardy demostró que una *infinidad* de valores de *s* satisface la hipótesis, pero una infinidad no es necesariamente todo. Una decisión de algún tipo que resuelva la conjetura de Riemann sería probablemente de mayor interés para los matemáticos que una prueba o un rechazo del último teorema de Fermat. La hipótesis de Riemann no es un tipo de problema que pueda ser abordado por métodos elementales. Ya ha dado lugar a una extensa y complicada bibliografía.

Legendre no fue el único gran matemático cuyas obras fueron comprendidas por Riemann, siempre con asombrosa rapidez cuando estaba en el Instituto. Se familiarizó con el Cálculo y sus ramificaciones a través del estudio de Euler. Es sorprendente que aunque su iniciación en el análisis fuera anticuada (los métodos de Euler estaban ya anticuados el año 1840 después de los trabajos de Gauss, Abel y Cauchy), llegara Riemann a ser un analista tan agudo. Pero de Euler tomó algo que también tiene su importancia en la obra matemática creadora. La apreciación de las formas simétricas y la inventiva para el tratamiento de las fórmulas. Aunque Riemann dependió principalmente en sus grandes inspiraciones de lo que pueden ser llamadas profundas ideas filosóficas, las que van al corazón de la teoría, su obra no carece, de todos modos, de esa "sencilla ingeniosidad" en la que Euler fue el maestro perfecto. La persecución de bellas fórmulas y de pulidos teoremas pueden, sin duda, degenerar rápidamente en un vicio estúpido, pero también pueden ir hacia la austera generalización, en un grado tal que las conclusiones sean tan generales que no puedan ser aplicadas a cualquier caso particular. El tacto matemático característico de Riemann impidió que cayera en los dos perniciosos extremos.

En 1846, teniendo 19 años, Riemann se matriculó como estudiante de filología y teología en la Universidad de Göttingen. Le animaba el deseo de agradar a su padre, y posiblemente ayudarle financieramente, obteniendo algún cargo retribuido tan pronto como le fuera posible. Pero no podía abstenerse de asistir a las conferencias matemáticas de Stern sobre la teoría de ecuaciones y sobre integrales definidas, a las de Gauss sobre el método de los mínimos cuadrados y a la de Goldschmidt sobre el magnetismo terrestre. Confesando todo a su indulgente padre, Riemann le pidió el permiso para desviar sus estudios. El padre consintió que Bernhard siguiera la carrera matemática, lo que produjo en el joven un sentimiento de profunda felicidad y agradecimiento.

Después de pasar un año en Göttingen,, donde la enseñanza era, sin duda, anticuada, Riemann marchó a Berlín para ser iniciado por Jacobi, Dirichlet, Steiner y Eisenstein, en nuevas y vitales Matemáticas. De todos estos maestros aprendió mucho, mecánica y álgebra superior de Jacobi, la teoría de números y análisis de Dirichlet, Geometría moderna de Steiner, mientras Eisenstein, que tenía tres años más que el discípulo le enseñó no sólo funciones elípticas, sino también confianza en sí mismo, pues él y el joven maestro tenían radicales diferencias de opinión acerca de cómo debían desenvolverse la teoría. Eisenstein insistía en establecer fórmulas bellas, a la manera de un modernizado Euler; Riemann deseaba introducir la variable compleja, y derivar toda la teoría, con un mínimo de cálculo, desde algunos simples principios generales. No hay duda de que así se originaron, al menos, los gérmenes de una de las más grandes contribuciones de Riemann a la Matemática pura. Como el origen de la obra de Riemann en la teoría de funciones de variable compleja es de considerable importancia para su propia historia y para la de las modernas Matemáticas examinaremos lo que se sabe acerca de esta cuestión.

La definición de una función analítica de una variable compleja, expuesta en relación con la anticipación de Gauss al teorema fundamental de Cauchy, fue esencialmente la de Riemann. Cuando se expresa analíticamente en lugar de geométricamente, esa definición se pone a la par de las ecuaciones en derivadas parciales[1], que Riemann tomó como punto de partida para una teoría

[1] Si $z = x + iy$, y $w = u + iv$, es una función analítica de z, las ecuaciones de Riemann son:

de funciones de una variable compleja. Según Dedekind, "Riemann reconoció en esas ecuaciones diferenciales parciales la definición esencial de una función (analítica) de una variable compleja. Probablemente estas ideas, de suma importancia para su futura carrera, fueron elaboradas por Riemann en las vacaciones del otoño de 1847 (tenía 21 años)".

Otra versión del origen de la inspiración de Riemann es debida, a Sylvester, quien narra la siguiente historia, muy interesante, aunque posiblemente no sea cierta. En 1896, el año antes de su muerte, Sylvester recuerda que estaba en "un hotel sobre el río en Nuremberg, donde ,conversaba con un librero de Berlín, que iba a trasladarse, como yo, a Praga... Me dijo que había sido condiscípulo de Riemann en la Universidad, y que un día, después de haber recibido de París algunos números de las *Comptes rendus*, había permanecido aislado durante algunas semanas, y cuando volvió a la sociedad de sus amigos dijo (refiriéndose a los trabajos recientemente publicados por Cauchy): Esta es una nueva Matemática".

Riemann permaneció dos años en la ciudad de Berlín. Durante los movimientos políticos de 1848 permaneció con el cuerpo de estudiantes leales, y tuvo que hacer guardia durante 16 horas para proteger, en el palacio real, a la nerviosa y sagrada persona del rey. En 1849 volvió a Göttingen para completar sus conocimientos matemáticos y doctorarse. Los problemas que le interesaban eran de ordinario más amplios que lo que suelen interesar al matemático puro, y, en efecto, dedicó gran parte de su tiempo a la ciencia física, aparte de la Matemática.

Aunque el real interés de Riemann fuera la física matemática, parece muy posible que de haber vivido 20 6 30 años más hubiera llegado a ser el Newton o el Einstein del siglo XIX. Sus ideas en la física eran muy audaces para su época. Hasta que Einstein se dio cuenta del sueño de Riemann de una física geometrizada (macroscópica), la física que Riemann previó, quizá algo oscuramente, no pareció razonable a los físicos. En esta dirección su único continuador comprensivo hasta antes de nuestro siglo, fue el matemático inglés William Kingdon Cliffor (1845-1879).

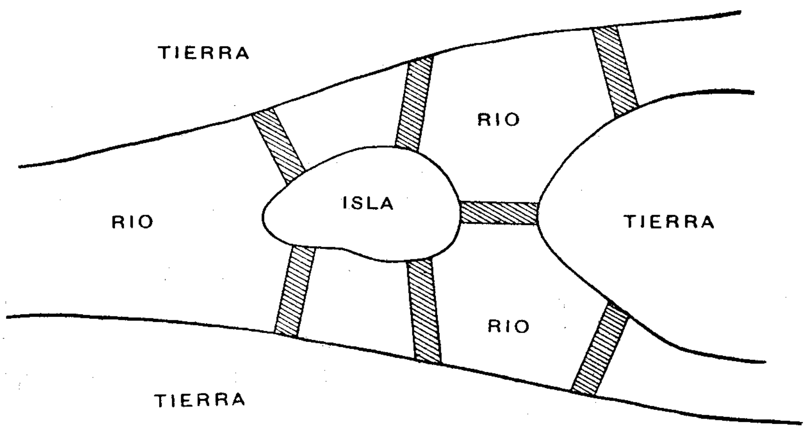
Durante sus últimos tres semestres en Göttingen asistió a conferencias sobre filosofía y siguió con el mayor interés, el curso de Wilhelm Weber de física experimental. Los escritos fragmentarios filosóficos y psicológicos, encontrados después de la muerte de Riemann, muestran que como pensador y filósofo era tan original como en Matemática y ciencia. Weber reconoció el genio científico de Riemann, y fue su íntimo amigo y útil consejero. En un grado mucho mayor que la mayoría de los grandes matemáticos que han escrito sobre ciencia física, Riemann tenía una inclinación para lo que es importante o probablemente, lo será en física, y esa inclinación no hay duda de que era debida a su trabajo en el laboratorio y a su contacto con hombres que eran esencialmente físicos y no matemáticos. Las contribuciones de los más grandes matemáticos puros a la ciencia física han solido caracterizarse por una singular indiferencia para el universo observado por los hombres de ciencia. Riemann, como matemático físico, estaba en la misma categoría de Newton, Gauss y Einstein en su instinto para aquello que probablemente tendrá uso científico en Matemática.

$$\frac{au}{ax} = \frac{av}{ay}$$

$$\frac{au}{ay} = \frac{av}{ax}$$

Estas ecuaciones fueron establecidas mucho antes por Cauchy, pero el mismo Cauchy tampoco fue el primero, pues D’Alembert las planteó en el siglo XVIII.

Como una secuela a sus estudios filosóficos con Johann Friedrich Herbart (1776-1841), Riemann llegó a la conclusión, en 1850 (tenía 24 años), de que "puede ser establecida una teoría matemática completa que vaya desde las leyes elementales para los puntos individuales hasta los procesos que aparecen ante nosotros en el plenum ('espacio continuamente lleno') de la realidad, sin distinción entre gravitación, electricidad, magnetismo o termostática". Estas palabras probablemente pueden ser interpretadas como la repulsa de Riemann a toda teoría de la "acción a distancia" en la ciencia física, en favor de la teoría del campo. En las últimas las propiedades físicas del "espacio" que rodea una "partícula cargada" son el objeto de la investigación matemática. Riemann, en esta fase de su carrera, parece haber creído en un "éter" que llena el espacio, concepción ahora abandonada, pero, como se aprecia en su obra excepcional sobre los fundamentos de la Geometría, más tarde buscó la descripción y correlación de los fenómenos físicos en la *Geometría* del "espacio" de la experiencia humana. Es decir, rechaza, como en la moda actual, el éter inobservable, como algo superfluo que no hace más que embrollar.
Fascinado por sus trabajos en el campo de la física, Riemann abandonó el lado matemático puro durante cierto tiempo, y en el otoño de 1850 asistió al seminario de física matemática fundado por Weber, Ulrich, Stern, y Listing. Los experimentos físicos en este seminario consumieron el tiempo que podría haber reservado para la disertación doctoral en Matemática, que Riemann no emprendió hasta que tuvo 25 años.
Podemos recordar de pasada a uno de los directores del seminario Johann Benedict Listing (1808 - 1882), pues probablemente influyó sobre los pensamientos de Riemann para lo que había de ser (1857) una de sus grandes conquistas, la introducción de los métodos topológicos en la teoría de funciones de variable compleja.
Se recordará que Gauss profetizó que el análisis situs constituiría uno de los campos más importantes de la matemática, y Riemann, con sus invenciones en la teoría de funciones, iba a cumplir en parte esta profecía. Aunque la topología (antes llamada Análisis situs) que se desarrolló al principio poca semejanza tiene con la complicada teoría que actualmente absorbe todas las energías de una fecunda escuela puede ser de interés recordar el trivial enigma que, al parecer inició la vasta e intrincada teoría. En los tiempos de Euler existían siete puentes sobre el río Pregel, en Königsberg, como muestra la figura.



Euler propuso el problema de cruzar por los siete puentes sin pasar dos veces por algunos de ellos. El problema es imposible.

Podríamos exponer en este lugar la forma de usar los métodos topológicos de Riemann en la teoría de funciones, pero no hay manera de hacer una adecuada explicación en lenguaje no técnico. Para la significación de "uniformidad" con respecto a una función de una variable compleja debemos referirnos a lo dicho en el capítulo sobre Gauss. Ahora, en la teoría de funciones abelianas, se presentan inevitablemente funciones *multiformes;* una función de n valores de z es una función que, salvo para ciertos valores de z, toma precisamente n valores distintos para cada valor asignado a z. Ilustrando la *multiformidad, o* la *polivalencia,* para funciones de una variable real, notemos que y, considerada como una función de x, definida por la ecuación $y^2 = x$, tiene doble valor. Por tanto si $x = 4$, tenemos $y^2 = 4$, y por esto $y = 2$ ó $- 2$; si x es cualquier número real, salvo cero o "infinito", y tiene los dos distintos valores de $\sqrt{x}$ y $-\sqrt{x}$. En este ejemplo, el más sencillo posible, y y x están relacionados por una ecuación algebraica, o sea $y^2 - x = 0$. Pasando inmediatamente a la situación general, de la cual este es un caso especial, discutiremos la función y de n valores, que se define como una función de x por la ecuación

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + ... + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0$$

en la cual las P son polinomios en x. Esta ecuación define y como una función de n valores de x. Como en el caso de $y^2 - x = 0$, existirán ciertos valores de x para los cuales dos o más de estos valores n de y son iguales. Estos valores de x son los llamados *puntos de ramificación* de la función de n valores definida por la ecuación.

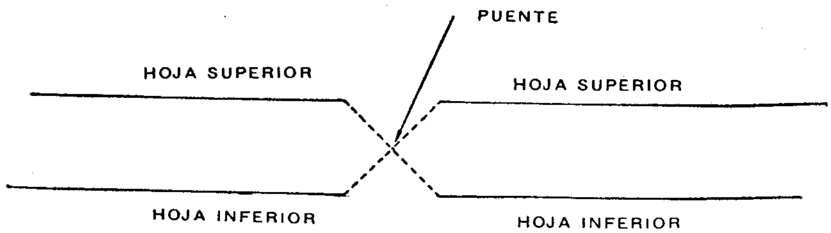
Todo ésto se extiende ahora a funciones de variables complejas, y la función w (también su integral) definida por

$$P_0(z)w^n + P_1(z)w^{n-1} + ... + P_{n-1}(z)w + P_n(z) = 0$$

en la cual z representa la variable compleja $s + it$, donde s, t son variables reales e $i = \sqrt{-1}$. Los valores n de w se llaman las *ramas* de la función w. Aquí debemos referirnos (capítulo sobre Gauss) a lo que se dijo acerca de la representación de funciones *uniformes* de z. Supongamos que la variable z ($= s + it$) traza un camino en su plano, y supongamos que la función *uniforme* $f(z)$ esté expresada bajo la forma $U + iV$, donde U, V son funciones de s, t. Entonces, para cada valor de z corresponderá uno, y solo uno, valor para cada una de U, V, y, como z traza su camino en el plano s, t, $f(z)$ trazará un camino correspondiente en el plano U, V: el camino de $f(z)$ estará *únicamente* determinado por el de z. Pero si w es una función *multiforme* (polivalente) de z, tal que precisamente n valores diferentes de w estén determinados por cada valor de z (salvo en los puntos de ramificación donde varios valores de w pueden ser iguales), entonces es obvio que un plano w ya no basta (si n es mayor que 1) para representar el camino, la "marcha" de la función w. En el caso de una función w de dos valores, tal como la determinada por $w^2 = z$ se necesitan dos planos w y, de un modo general, para una función de n valores *(n* finita o infinita), hacen falta, precisamente, n de tales planos w.

Las ventajas de considerar funciones *uniformes* (de *un* valor) en lugar de funciones de n valores *(n* mayor que 1) aparecen de modo manifiesto, aun para quien no sea matemático. Lo que Riemann hizo fue esto: en lugar de los n planos w diferentes, introdujo una superficie de n hojas, del tipo que brevemente describiremos después, sobre la cual la función *multiforme* es *uniforme,* es decir, sobre la cual, a cada "lugar" sobre la superficie corresponde un valor, y sólo uno de las funciones representadas.

Riemann *unió,* por así decir, todos los planos *n* en un plano único y logró esto mediante un procedimiento que al principio puede parecer como una inversión de la representación de las *n* ramas de la función de *n* valores sobre *n* planos diferentes; pero una detenida consideración mostrará que, en efecto, *restableció la uniformidad.* Colocó *n* planos, uno sobre otro; cada uno de estos planos, u *hojas,* se asocia con una rama particular de la función, de modo que, en tanto que *z* se mueve, en una hoja particular, la correspondiente rama de la función es recorrida por *w* (la función de *n* valores de *z* en discusión), y como *z* pasa de una hoja a otra, las ramas se cambian, una en otra, hasta que, habiendo recorrido la variable *z* todas las hojas y habiendo vuelto a su posición inicial, la rama original se restablece. El paso de la variable *z* desde una hoja a otra es efectuado por medio de *atajos* (que pueden ser considerados como puentes rectos), que unen puntos de ramificación a lo largo de un determinado atajo que proporciona el paso de una hoja a otra se imagina un "labio" de la hoja superior pegado o unido al labio opuesto de la hoja inferior, y similarmente para el otro labio de la hoja, superior. Esquemáticamente, en sección transversal:



Las hojas no están unidas por atajos al azar (que pueden ser trazadas en muchas formas por determinados puntos de ramificación), sino ligadas de modo tal que, cuando *z* atraviesa su superficie de *n* hojas pasando desde una hoja a otra al alcanzar un puente o atajo, el comportamiento *analítico* de la función de *z* es descripto consecuentemente, en particular por lo que se refiere al intercambio de las ramas consiguientes sobre la variable *z*, si están representadas en un plano, que rodean completamente un punto de ramificación. A este circuito de un punto de ramificación del plano *z* único corresponde, sobre la superficie de Riemann de *n* hojas, el paso desde una hoja a otra y el intercambio resultante de las ramas de la función.

Existen muchas formas en que la variable puede trasladarse a la, *superficie de Riemann* de *n* hojas, pasando desde una hoja a otra. Para cada una de éstas corresponde un intercambio particular de las ramas, de la función, que puede ser simbolizado escribiendo, una tras otra, letras que denotan las diversas ramas intercambiadas. En esta forma, tenemos los símbolos de ciertas *sustituciones* (como en el capítulo XV) de *n* letras; todas estas sustituciones engendran un grupo que, en algunos aspectos, explica la naturaleza de la función considerada.

Las superficies de Riemann no son fáciles de representar gráficamente, y quienes las usan se contentan con representaciones sistemáticas de la conexión de las hojas, de una forma semejante a como los químicos escriben una fórmula "gráfica" de un complicado compuesto de carbono para representar en una forma esquemática el comportamiento químico del compuesto, pero sin que en modo alguno supongan que representa la verdadera disposición espacial de los átomos en el compuesto. Riemann hizo considerables progresos, particularmente en la teoría de funciones abelianas, por medio de sus superficies y su topología, siendo una cuestión de este tipo conseguir que los atajos sean imaginados en forma tal que hagan equivalente a un plano la superficie de *n* hojas. Pero los matemáticos no tienen mayor capacidad que cualquier otro mortal para imaginar complicadas relaciones espaciales, siendo excesivamente raro que posean un alto grado de "intuición" espacial.

A principios de noviembre de 1851 Riemann presentó su disertación doctoral, *Grundlagen für eine allegemeine Theorie der Functionen ciner veränderlichen complexen Grösse* (Fundamentos para una teoría general de las funciones de una variable compleja) a la consideración de Gauss. Esta obra del joven maestro de 25 años fue una de las pocas contribuciones modernas a la Matemática que despertó el entusiasmo de Gauss, quien cercano ya a la muerte constituía una figura casi legendaria. Cuando Riemann visitó a Gauss después de que éste había leído la disertación, el viejo maestro le comunicó que hacía años que había planeado un tratado sobre el mismo tema. El informe oficial de Gauss a la Universidad de Göttingen merece citarse como uno de los pocos casos en los que Gauss se expresó claramente.

"La disertación presentada por Herr Riemann ofrece pruebas convincentes de que ha realizado detenidas y penetrantes investigaciones en aquellas partes del tema tratadas en la disertación, de que posee una mente creadora activa, verdaderamente matemática y de que es dueño de una gloriosa y fecunda originalidad. La presentación es notable y concisa y en algunos puntos bella. La mayoría de los lectores podría preferir mayor claridad en el orden. En conjunto es una obra de valor substancial, que no sólo satisface las exigencias de las disertaciones doctorales sino que las supera".

Un mes más tarde Riemann dio su examen final, incluyendo la formalidad de una "defensa" pública de su disertación. Todo marchaba perfectamente, y Riemann comenzó a tener la esperanza de lograr una posición digna de su talento. "Creo que he mejorado mis perspectivas con mi disertación, escribía a su padre, espero también aprender a escribir más rápidamente y con mayor fluidez, especialmente si frecuento la sociedad y si tengo probabilidades de pronunciar conferencias; por tanto tengo un buen ánimo". Se excusa también ante su padre de no haber aspirado a una ayudantía vacante en el observatorio de Göttingen, pero como supone va a ser "habilitado" como *Privatdozent*, el porvenir no le parece demasiado negro.

Para su *Habilitationsschrift* Riemann pensó presentar una memoria sobre series trigonométricas (series de Fourier), pero transcurrieron dos años y medio antes de que pudiera pasar desde instructor universitario no retribuido hasta recibir las matrículas de los estudiantes por asistir a sus conferencias. Durante el otoño de 1852 Riemann aprovechó la presencia de Dirichlet en Göttingen, durante unas vacaciones, y buscó su consejo para la memoria que tenía en embrión. Dirichlet quedó cautivo por la modestia y el talento de Riemann. "A la mañana siguiente [después de una fiesta] Dirichlet estuvo conmigo durante dos horas, escribía Riemann a su padre. Me facilitó las notas que necesitaba para mi trabajo de habilitación, que de otro modo me hubieran consumido muchas horas de estudio laborioso en la biblioteca. Leyó también mi disertación y se mostró muy amistoso, mucho más de lo que yo pudiera esperar si considero la gran distancia que existe entre nosotros. Espero que me recordará más adelante". Durante esta visita de Dirichlet realizó también excursiones con Weber y otros hombres de ciencia, y Riemann dice a su padre que estas pequeñas escapadas le hicieron científicamente mayor beneficio que si hubiera pasado las horas inclinado sobre sus libros.

Desde 1853 (Riemann tenía entonces 27 años) en adelante se dedicó intensamente a la física matemática. A finales del año había terminado su trabajo, después de muchas demoras debidas a su pasión, cada vez mayor, por la ciencia física.

Tenía aún que pasar por otro ejercicio antes de ser nombrado para el ansiado cargo. Con este objeto presentó tres temas para que la Facultad escogiese, esperando que la elección recayera sobre uno de los dos primeros, en los que estaba perfectamente preparado. Pero incautamente había incluido, como tercer tema, una cuestión en la que Gauss había trabajado sesenta años o más, los fundamentos de la Geometría, y este tema no lo había preparado. No hay duda de que Gauss sintió la curiosidad de ver como Riemann, con su gloriosamente fecunda originalidad, atacaría el difícil tema. Con gran consternación de Riemann, Gauss designó el tercer tema para que demostrara ante la Facultad su habilidad como conferenciante. "Estoy nuevamente sumido en la perplejidad, decía secretamente el imprudente joven a su padre, porque tengo que ocuparme de este tema. He reanudado mis investigaciones acerca de la relación entre electricidad, magnetismo, luz y gravitación, y he progresado tanto que puedo publicar este estudio sin temor. Estoy cada vez más convencido de que Gauss ha trabajado en este tema durante años, y ha hablado acerca de él con algunos amigos,(Weber entre otros). Secretamente os escribo, pues no quiero parecer arrogante, pero espero que aun no sea demasiado tarde para mí y que obtendré el reconocimiento como investigador".

El esfuerzo de realizar dos investigaciones extraordinariamente difíciles simultáneamente, mientras actuaba como ayudante de Weber en el seminario de física matemática, unido a los obstáculos de la pobreza produjeron en él un derrumbe temporal. "He estado tan absorbido en mi investigación sobre la unidad de todas las leyes físicas, que cuando me fue entregado el tema para mi conferencia, no pude abandonar la investigación. Luego, en parte como resultado de las meditaciones, en parte debido a mi permanencia constante en lugares cerrados durante esta mala estación, caí enfermo; mis viejos males se repitieron con gran frecuencia, y no pude continuar mi labor. Varias semanas más tarde, al mejorar el tiempo, comencé a sentirme mejor. Para el verano alquilé una casa con un jardín, y desde entonces mi salud no se ha alterado. Habiendo terminado dos semanas después de Pascua una parte de mi trabajo, comencé a dedicarme a mi conferencia y la terminé alrededor de Pentecostés [es decir en siete semanas]. Tuve alguna dificultad para fijar la fecha de mi conferencia, y hasta creí que tendría que volver a Quickborn sin haber logrado mi objeto. Gauss está gravemente enfermo, y los médicos creen que su muerte es inminente. Estando demasiado débil para asistir a mis pruebas, me pidió que esperase hasta agosto, creyendo que mejoraría su salud. Luego, el viernes después de Pentecostés, decidió que la conferencia tuviera lugar al día siguiente a las 11,30. El sábado me sentía feliz con estos acontecimientos".

Este es el relato de Riemann respecto a su conferencia histórica, que habría de revolucionar la Geometría diferencial, y preparar el camino para la física geometrizada de nuestra generación. En la misma carta narra cómo realizó su labor durante la Pascua. Weber y algunos de sus colaboradores "han hecho mediciones muy exactas de un fenómeno que hasta entonces no había sido investigado, la carga residual en una botella de Leyden [después de la descarga se observa que la botella no ha quedado completamente descargada]. Le comuniqué [a uno de los colaboradores de Weber, Kohlrauch] mi teoría de este fenómeno, que he elaborado especialmente para este fin. He encontrado su explicación mediante mis investigaciones acerca de la relación entre electricidad, luz y magnetismo. Esta cuestión era muy importante para mí, pues es la primera vez que he podido aplicar mi trabajo a un fenómeno aun desconocido, y espero que la publicación contribuirá a que mi obra más amplia sea recibida favorablemente".

La conferencia de prueba de Riemann (10 de junio de 1854) fue acogida tan cordial como podía desear su carácter modesto. La preparación de su conferencia le hizo sudar sangre, pues estaba decidido a hacerla inteligible hasta para aquellos miembros de la Facultad que tuvieran escaso conocimiento de Matemática. Aparte de constituir una de las grandes obras maestras de la Matemática, el ensayo de Riemann *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen.* (Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría) es también perfecta en su presentación. Gauss estaba entusiasmado. "Contra la tradición eligió el tercero de los tres temas presentados por el candidato deseando ver como esa difícil cuestión era tratada por un hombre tan joven. Su sorpresa fue más allá de todas sus esperanzas, y al volver de la reunión de la Facultad manifestó a Wilhelm Weber su más alta estima por las ideas presentadas por Riemann, hablando con un entusiasmo que era raro en Gauss". Lo poco que puede decirse en este lugar acerca de esta obra maestra será reservado para la conclusión de este capítulo.

Después de una temporada de reposo en Quickborn, en compañía de su familia, Riemann volvió en septiembre a Göttingen, donde preparó apresuradamente una conferencia (dedicando a este trabajo las noches para poder tenerla terminada), que debía ser pronunciada en una reunión de hombres de ciencia. Su tema era la propagación de la electricidad en los no conductores. Durante el año continuó sus investigaciones en la teoría matemática de la electricidad, y preparó un trabajo sobre los anillos coloreados de Nobili. Refiriéndose a este estudio escribía a su hermana Ida: "Este tema es importante, porque se pueden hacer mediciones muy exactas en relación con él, y comprobar las leyes de acuerdo a las cuales la electricidad se mueve".

En la misma carta (9 de octubre de 1854) expresa su ilimitado goce por el triunfo de su primera conferencia académica, y su gran satisfacción por el inesperado gran número de oyentes. ¡Habían venido a oírle ocho estudiantes! Riemann suponía que no llegarían a dos o tres. Alentado por esta inesperada popularidad Riemann escribía a su padre: "He sido capaz de mantener regularmente mis clases. Mi primera desconfianza ha ido disminuyendo cada vez más, y me he habituado a pensar más en los oyentes que en mí mismo y a leer en sus expresiones si debo pasar a otros puntos o explicar más detenidamente la cuestión".

Cuando Dirichlet sucedió a Gauss en 1855, los amigos de Riemann solicitaron de las autoridades universitarias el nombramiento de éste como profesor ayudante, pero las finanzas de la Universidad no eran muy abundantes. De todos modos, le fue concedido un sueldo equivalente a doscientos dólares por año, preferible a la inseguridad de las matrículas de media docena de estudiantes voluntarios. Su futuro le apesadumbraba, y cuando perdió a su padre y a su hermana Clara, no siéndole ya posible trasladarse a Quickborn durante las vacaciones Riemann se entristeció profundamente. Sus tres restantes hermanas fueron a vivir con el otro hermano, que era empleado de correos de Bremen, cuyo sueldo era principesco al lado de la posición económica del matemático.

Al siguiente año (1856; Riemann tenía entonces 30 años), las perspectivas se aclararon un poco. Era imposible el desaliento para un genio creador como Riemann, en tanto pudiera disponer de los exiguos medios para seguir viviendo. A este período pertenece parte de su obra característicamente original sobre las funciones abelianas, sus trabajos clásicos sobre las series hipergeométricas (véase el capítulo sobre Gauss) y las ecuaciones diferenciales, de gran importancia en la física matemática, sugeridas por estas series. En esas obras Riemann señala nuevas direcciones. Su capacidad de generalización, su notable intuición en la forma de abordar los problemas, constituían características de este autor. Sus trabajos absorbieron todas sus energías e hicieron felices sus horas, a pesar de las tristezas materiales; posiblemente este fatal optimismo era propio de la tuberculosis que ya se indicaba.

Las investigaciones de Riemann en la teoría de funciones abelianas difiere tanto de los estudios de Weierstrass como la luz de la Luna difiere de la luz del Sol. La manera como abordaba los problemas Weierstrass era metódica, exacta en todos sus detalles, como el avance de un ejército perfectamente disciplinado bajo el mando de un general que prevé todas las contingencias. Riemann, en cambio, abarcaba todo el campo, sin cuidarse de los detalles, contentándose con reconocer las posiciones clave en la topografía general. El método de Weierstrass era aritmético, el de Riemann geométrico e intuitivo. Decir que uno es mejor que otro carece de sentido, pues ambos no pueden ser examinados desde un punto de vista común.

El exceso de trabajo y la falta de comodidades provocó en Riemann un derrumbe nervioso cuando tenía 30 años, y el joven se vio forzado a trasladarse durante algunas semanas, con un amigo, a la región montañosa de Hartz, donde fue visitado por Dedekind. Los tres realizaron largos viajes por las montañas, y Riemann se restableció pronto. Librado del esfuerzo de los deberes académicos, Riemann entretenía a sus compañeros con su excelente humor. Entre ellos hablaban de sus problemas, como acostumbran a hacerlo, cuando se reúnen, los juristas, los médicos o los hombres de negocios. Una tarde, después de una fatigosa caminata, Riemann aludió a la vida de Newton, de Brewster, hablando de la carta de Bentley, en la cual Newton mismo afirma la imposibilidad de la acción a distancia sin la intervención de un medio. Esta afirmación produjo el entusiasmo de Riemann, inspirándole una espontánea conferencia. En la actualidad, el "medio" que Riemann defendía no es el éter luminífero, sino su propio "espacio curvado", o su reflexión en el espacio-tiempo de la relatividad.

Al fin, en 1857, teniendo 31 años, Riemann obtuvo el cargo de profesor ayudante. Su sueldo era el equivalente a 300 dólares por año, pero como no estaba habituado a la riqueza, le bastaba. Pero entonces se produjo un verdadero desastre: su hermano murió, y desde entonces tuvo que cuidar de sus tres hermanas. Tocaban exactamente a 75 dólares al año por cabeza. No hay, pues, que sorprenderse de que contrajera una tuberculosis. Sin embargo, el Señor que tan generosamente se mostró, pronto alivió a Riemann de la carga de su hermana menor, Marie, de modo que el ingreso individual podía calcularse en 100 dólares por año y persona. Si las raciones tenían que ser escasas, el cariño era abundante, y Riemann se veía más que pagado de sus sacrificios por la devoción de sus hermanas, que le alentaban en su trabajo. El Señor parece haber sabido que si algún mortal necesita aliento, el pobre Riemann no era el que menos lo necesitaba.

En 1858 Riemann escribió su trabajo sobre electrodinámica, del cual comunica a su hermana Ida el siguiente comentario: "Mi descubrimiento relacionado con la íntima conexión entre electricidad y luz lo he dedicado a la Real Sociedad [de Göttingen]. Por lo que he oído, Gauss ideó otra teoría, respecto a esta íntima relación, diferente de la mía, y la comunicó a sus íntimos amigos. Sin embargo, estoy plenamente convencido de que mi teoría es la exacta, y que en pocos años será reconocida como tal." Como es sabido Gauss pronto retiró su memoria y no la publicó; probablemente no estaba satisfecho de ella. Parece que Riemann fue demasiado optimista; pues es la teoría electromagnética de Clerk Maxwell la que hoy se admite, en los fenómenos macroscópicos. El presente estado de las teorías de la luz y del campo electromagnético es demasiado complicado para ser descripto en este lugar; bastará añadir que la teoría de Riemann fue desechada.

Dirichlet murió el 5 de mayo de 1859. Siempre apreció a Riemann e hizo cuanto pudo para ayudar al joven en sus luchas. El interés de Dirichlet, que había aumentado rápidamente la reputación de Riemann fue la causa de que el gobierno nombrase a éste como sucesor. En consecuencia, a los 33 años Riemann fue el segundo sucesor de Gauss. Para aliviar sus dificultades económicas, las autoridades universitarias le permitieron residir en el Observatorio, como Gauss había hecho. El reconocimiento sincero, el elogio de los matemáticos, que aunque más viejos que él eran en cierto grado sus rivales, no se hizo esperar. En una visita a Berlín fue felicitado por Borchartd, Kummer, Kronecker, y Weierstrass. Las Sociedades doctas, incluyendo la Sociedad Real de Londres y la Academia Francesa de Ciencias, le honraron nombrándole miembro, y en poco tiempo obtuvo todas las distinciones que puede recibir un hombre de ciencia. Una visita a París, en 1860 le permitió conocer a los principales matemáticos franceses, particularmente a Hermite, cuya admiración por Riemann era ilimitada. Dicho año es memorable en la historia de la física matemática, por ser aquel el que Riemann comenzó a trabajar intensamente sobre su memoria *Uber eine Frage der Wärmeleitung.* (Sobre una cuestión de la conducción del calor), en la que desarrolla toda la cuestión de las formas diferenciales cuadráticas (que será mencionada en relación con la ,obra de Riemann sobre los fundamentos de la Geometría), que es básica en la teoría de la relatividad.

Sus problemas materiales habían mejorado considerablemente con su nombramiento de profesor titular, y Riemann pudo casarse cuando tenía 36 años. Su mujer, Elise Koch, era amiga de sus hermanas. Un mes después de su matrimonio Riemann cayó enfermo (julio de 1862), con pleuresía. Una curación incompleta dio lugar a la tuberculosis. Amigos influyentes pidieron al gobierno que concediera a Riemann los fondos necesarios para que convaleciera en el suave clima de Italia, donde permaneció aquel invierno. La primavera siguiente, en su viaje de regreso a Alemania, pudo visitar los tesoros de arte de muchas ciudades italianas. Este fue el breve verano de su vida.

Lleno de esperanza dejó su amada Italia, pero volvió a caer gravemente enfermo al llegar a Göttingen. En el viaje de regreso se había cuidado muy poco, y durante un paseo por la nieve sufrió un grave enfriamiento. El siguiente agosto (1863) volvió a Italia, deteniéndose primero en Pisa donde nació su hija Ida, (llamada así en recuerdo de su hermana mayor). El invierno fue excepcionalmente crudo y el río Arno se congeló. En mayo se trasladó a una pequeña villa en los suburbios de Pisa. Allí murió su hermana menor Helene, y su enfermedad, complicada con ictericia, se hizo cada vez más grave. Con gran pesar se vio obligado a rechazar la cátedra que le ofreció la Universidad de Pisa. La Universidad de Göttingen le concedió generosamente permiso para permitirle pasar el invierno en Pisa rodeado por sus amigos, los matemáticos italianos. Pero nuevas complicaciones le hicieron volver al hogar, y después de haber buscado vagamente la salud en Liorna y Génova, regresó en octubre a Göttingen, donde pasó un invierno tolerable.

Durante toda esta época trabajó cuanto pudo. En Göttingen expresó muchas veces el deseo de hablar con Dedekind de las obras que no había completado, pero jamás se sintió lo suficientemente fuerte para realizar la visita. Uno de sus últimos proyectos fue trabajar sobre la mecánica del oído, estudio que dejó incompleto. Esperaba terminar este trabajo, así como algunos otros, que consideraba de gran importancia, y en un final intento de recobrar su vigor volvió a Italia.

Sus últimos días pasaron en una villa, en Selasca, a orillas del Lago Mayor.

Dedekind cuenta cómo murió su amigo: "Sus fuerzas declinaban rápidamente, y sentía que su fin estaba próximo. El día antes de su muerte trabajaba bajo una higuera, el alma henchida de gozo en el glorioso paisaje que se extendía alrededor de él... Su vida se deslizaba suavemente sin lucha ni agonía. El enfermo parecía seguir con interés la separación del alma y del cuerpo; su mujer le daba pan y vino... él le decía. Besa a nuestra hija. Ella repetía el Padrenuestro, que el moribundo era incapaz de repetir; en las palabras 'Perdónanos nuestras deudas', él la miró cariñosamente; la mujer sintió su mano cada vez más fría entre las de ella, y después de algunos suspiros, su puro y noble corazón dejó de latir. La suave mente forjada en la casa de su padre, permaneció durante toda su vida, y sirvió a su Dios con tanta fidelidad como su padre había hecho, pero de modo diferente".

Riemann murió en plena gloria de su genio maduro, el 20 de julio de 1866, teniendo 39 años. La inscripción sobre su lápida costeada por sus amigos italianos, termina con las palabras *"Denen die Gott lieben müssen alle Dinge zum Besten dienen"* (Aquellos que aman a Dios deben servirse de todas las cosas del mejor modo).

La grandeza de Riemann como matemático reside en su poderosa capacidad de generalización y en el alcance ilimitado de los métodos y nuevos puntos de vista que descubrió tanto en la Matemática pura como en la Matemática aplicada. Los detalles jamás le importaron, y apreciaba el conjunto de un vasto problema en la forma de una unidad coherente. Hasta en las notas fragmentarias; en los proyectos incompletos, muestra la novedad, y nos permite pensar que Riemann murió mucho antes de haber realizado toda su labor. En este lugar tan sólo podemos hablar de una de sus grandes obras maestras, la memoria de 1854 sobre los fundamentos de la Geometría, y aunque no pudo ser fácil a Clifford utilizarla simplemente para proponer otra Geometría, citaremos su audaz trabajo de 1870 *(On the space - theorie of matter)* sobre la teoría-espacio de la materia como una introducción singularmente profética al cuerpo y al espíritu de la Geometría de Riemann.

Clifford no era un plagiario servil, sino un hombre con un talento brillantemente original, del cual podía decirse, como Newton dijo de Cotes: "De haber vivido, podríamos haber conocido alguna cosa". El lector que esté familiarizado con algunas de las mejores vulgarizaciones de la física relativista y de la teoría ondulatoria de los electrones reconocerá varias curiosas anticipaciones de las teorías corrientes en la breve profecía de Clifford.

"Riemann ha demostrado que existen diferentes tipos de líneas y superficies, de modo que existen tipos diferentes de espacio de tres dimensiones; y sólo por la experiencia podemos descubrir a cuál de estos tipos pertenece el espacio en que vivimos. En particular, los axiomas de la geometría plana son exactos dentro de los límites del experimento sobre la superficie de una hoja de papel, y sin embargo, sabemos que la hoja está realmente cubierta de cierto número de pequeñas arrugas y surcos, sobre los cuales (no siendo cero la curvatura total) estos axiomas no son verdaderos. Análogamente, dice dicho autor, aunque los axiomas de la Geometría del espacio son verdaderos dentro de los límites del experimento para porciones finitas de nuestro espacio, no hay razón para concluir que son ciertos para porciones muy pequeñas, y si una ayuda puede ser obtenida de este modo para la explicación de los fenómenos físicos, podemos tener razones para concluir que no son ciertos para porciones muy pequeñas del espacio.

"Deseo aquí indicar una forma en que estas especulaciones pueden ser aplicadas a la investigación de los fenómenos físicos. Mantengo, en efecto:

1) Que pequeñas porciones del espacio son de hecho de una naturaleza análoga a pequeñas colinas en una superficie que está sobre la llanura, o sea que las leyes ordinarias de geometría no son válidas en ellas.
2) Que esta propiedad de estar curvada o deformada pasa continuamente desde una porción del espacio a otra a la manera de una onda.
3) Que esta variación de la curvatura del espacio es lo que realmente tiene lugar en ese fenómeno que llamamos el movimiento de la materia, sea ponderable o etérea.
4) Que en el mundo físico no tiene lugar otra cosa que esta variación, sujeta (posiblemente) a la ley de continuidad.

"Me he esforzado en una forma general para explicar las leyes de la doble refracción basándome en esta hipótesis, pero aun no he llegado a resultados suficientemente decisivos para ser publicados".

Riemann creyó también que su nueva Geometría sería de importancia científica, según lo muestra la conclusión de su memoria.

"Por tanto la realidad que yace bajo el espacio debe formar una variedad discontinua, o debemos buscar el fundamento de sus relaciones métricas fuera de él, en fuerzas de unión que sobre él actúan.

"La respuesta a estas cuestiones tan sólo pueden ser logradas partiendo de la concepción de fenómenos que hasta ahora han sido comprobados por la experiencia, y que Newton acepta como un fundamento, y haciendo en esta concepción los cambios sucesivos requeridos por los hechos que no puede explicar". Luego sigue diciendo que investigaciones como las suyas, que parten de nociones generales, "pueden ser útiles para impedir que este trabajo se vea obstaculizado por conceptos demasiado estrechos, y que el progreso del conocimiento de la interdependencia de las cosas sea frenado por prejuicios tradicionales.

"Esto nos lleva al dominio de otra ciencia, el de la física, en la que el objeto de este trabajo no nos permite penetrar hoy".

La obra de Riemann de 1854 iluminó la Geometría con una nueva luz. La Geometría que él imagina es no euclidiana, no en el sentido de Lobatchewsky y Johann Bolyai, ni tampoco en el de la elaboración de Riemann de la hipótesis del ángulo obtuso (explicada en el capítulo XVI), sino en un sentido más comprensivo, dependiente del concepto de *medida.* Considerar las *relaciones de medida* como el nervio de la teoría de Riemann es cometer una injusticia. La teoría contiene mucho más que una aprovechable filosofía de la medida; pero ésta es una de sus principales características. Ningún párrafo de la concisa memoria de Riemann sintetiza lo que hay en ella; de todos modos intentaremos describir algunas de sus ideas básicas, y elegiremos tres: el concepto de *multiplicidad,* la definición de *distancia* y la noción de *curvatura* de una multiplicidad.

Una multiplicidad es una *clase* de objetos (al menos en la Matemática común) tal que cualquier miembro de la clase puede ser completamente especificado asignándole ciertos números, en un orden definido, que corresponden a propiedades "numerables" de los elementos, correspondiendo la asignación en el orden dado a un orden preasignado de las propiedades "numerables". Aunque se conceda que esto pueda ser hasta menos comprensible que la definición de Riemann, es, de todos modos, una base de trabajo desde la cual partir, y a todo lo que se llega en la Matemática es a esto: una multiplicidad es una serie de *n-ples*" ordenada de números ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) donde los paréntesis, indican que los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se han de escribir en el orden dado. Dos de tales n-ples, ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) y ($y_1, y_2, \ldots, y_n$) son *iguales* cuando, y sólo cuando los números correspondientes en ellos son respectivamente iguales, o sea cuando, y sólo cuando, $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$.

Si precisamente *n* números se presentan en cada uno de estos n-ples en la multiplicidad, se dice que la multiplicidad será de *n dimensiones.* Así tenemos que volver a las coordenadas de Descartes. Si cada uno de los números ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) es un entero positivo, cero o negativo, o si es un elemento de cualquier serie numerable (una serie cuyos elementos pueden ser contados 1, 2, 3 ...), y si lo mismo ocurre para cualquier n-ple en la serie, se dice que la multiplicidad es *discontinua. Si* los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pueden tomar valores *continuamente* (como en el movimiento de un punto a lo largo de una línea) la multiplicidad es *continua.*

Esta definición ha pasado por alto deliberadamente, la cuestión de si la serie de *n-ples* ordenada es "la multiplicidad", o si alguna cosa "representada por" esta es "la multiplicidad". Así, cuando decimos que (x,y) son las coordenadas de un punto en un plano, no preguntamos lo que es "un punto en un plano", sino que procedemos a actuar con estas *parejas ordenadas de números x,y*), donde x,y toman todos los valores reales independientemente. En cambio, puede algunas veces ser ventajoso fijar nuestra atención sobre lo que representa un símbolo como (x,y). Por ejemplo, si x es la edad en segundos de un hombre e y su altura en centímetros, podemos estar interesados en el *hombre (o* la clase de todos los hombres), más bien que en sus *coordenadas, con las cuales está relacionada tan sólo la Matemática de nuestra pesquisa.* En este mismo orden de ideas, la Geometría ya no se refiere a lo que el "espacio" “es”, si "es" significa o no algo en relación al "espacio". El espacio, para un matemático moderno, es simplemente una multiplicidad, número del tipo antes descripto, y esta concepción del espacio se deriva de las "multiplicidades" de Riemann.

Pasando a la medida, Riemann afirma que "la medida consiste en una superposición de las magnitudes que han de ser comparadas. Si esto falta, las magnitudes pueden ser comparadas tan sólo cuando una es parte de otra, y entonces sólo se puede decidir acerca del más o el menos, pero no del cuánto". Puede decirse de pasada que una teoría consecuente y útil de la medida es actualmente un deseo urgente en la física teórica, particularmente en todas las cuestiones donde son de importancia los cuantos y la relatividad.

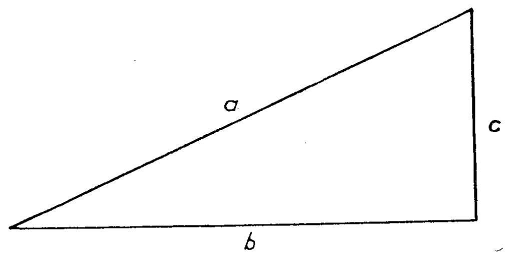
Descendiendo una vez más desde las generalidades filosóficas a la, Matemática menos mística, Riemann procedió a establecer una definición de distancia, basada en su concepto de medida, que ha sido extraordinariamente fructífera en física y en matemática.

El teorema pitagórico

$$a^2 = b^2 + c^2 \ o$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

donde *a* es la longitud de la diagonal de un rectángulo y *b*, *c* las longitudes de los dos lados, es la fórmula fundamental para la medida de distancias en un plano. ¿Cómo extenderemos esta fórmula a una *superficie curva?*



A las líneas rectas del plano corresponden geodésicas (véase capítulo XIV) de la superficie; pero en una esfera, por ejemplo la proposición pitagórica no es cierta para un triángulo rectángulo formado por geodésicas. Riemann generalizó el teorema de Pitágoras para cualquier multiplicidad del siguiente modo:

Supongamos que

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots, x_n + x'_n)$$

son las coordenadas de dos "puntos" de la multiplicidad que están "infinitamente próximos" uno de otro. Para nuestro propósito la significación de "infinitamente próximo" es que las potencias superiores a la segunda de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, que miden la separación de los dos puntos en la multiplicidad, se pueden despreciar. Por sencillez estableceremos la definición cuando $n = 4$ que da la distancia entre dos puntos próximos en un espacio de cuatro dimensiones: la distancia es la raíz cuadrada de

$$\begin{aligned} &g_{11}x_1'^2 + g_{22}x_2'^2 + g_{33}x_3'^2 + g_{44}x_4'^2 + \\ &+ g_{12}x_1'x_2' + g_{13}x_1'x_3' + g_{14}x_1'x_4' + \\ &+ g_{23}x_2'x_3' + g_{24}x_2'x_4' + \\ &+ g_{34}x_3'x_4' \end{aligned}$$

en las que los 10 coeficientes $g_{11},\ldots, g_{34}$ son funciones de x_1, x_2, x_3, x_4. Para valores particulares de las g, se define un "espacio". Así, podemos tener

$$g_{11} = 1,$$
$$g_{22} = 1,$$
$$g_{33} = 1,$$
$$g_{44} = 1,$$

y todas las restantes g cero; o podemos considerar un espacio en el cual todas las g, salvo 944 Y 934 fueran cero, y así sucesivamente. Un espacio considerado en relatividad es de este tipo general, en el que todas las g salvo g_{44} y g_{34} son cero, y existen ciertas expresiones simples que abarcan x_1, x_2, x_3, x_n.
En el caso de un espacio n-dimensional la distancia entre puntos *próximos* se define en una forma similar; la expresión general contiene

$$\tfrac{1}{2}\, n(n + 1) \text{ términos.}$$

Una vez dada la fórmula pitagórica generalizada para la distancia entre puntos próximos es un problema de Cálcalo integral encontrar la distancia entre dos puntos *cualesquiera* del espacio. Un espacio cuya *métrica* (sistema de medida) se define por una fórmula del tipo descripto se llama *riemanniano.*
La curvatura, según la concibe Riemann (y antes de él Gauss; véase capítulo sobre este último), es otra generalización de la experiencia común. Una línea recta tiene curvatura cero; la "medida" de la cantidad en que una línea curva se separa de la recta puede ser la misma para cualquier punto de la curva, como ocurre para un círculo), o puede variar de un punto a otro de la curva, cuando se hace necesario además expresar la "cantidad de curvatura" empleando infinitésimos. Para las superficies curvas, la curvatura se mide similarmente por la desviación de un plano que tiene curvatura cero. Esto puede ser generalizado y precisado algo más del siguiente modo. Por simplicidad planteamos primero la situación para un espacio bidimensional, o sea para una superficie como nosotros imaginamos ordinariamente las superficies. Es posible partiendo de la fórmula

$$g_{11}x_1'^2 + g_{12}x_1'x_2' + g_{22}x_2'^2$$

que expresa (como antes) el cuadrado de la distancia entre puntos próximos sobre una superficie dada (determinada cuando las funciones g_{11}, g_{12}, g_{22} son dadas), calcular la medida de la curvatura de cualquier punto de la superficie completamente en *función de* g_{11}, g_{12}, g_{22}. Ahora bien, en el lenguaje ordinario, hablar de la curvatura de un espacio de más de dos dimensiones es decir algo sin significación. De todos modos, Riemann, generalizando los conceptos de Gauss, procedió en la misma forma matemática para construir una expresión que comprende todas las g en el caso general de un espacio n-dimensional, que es matemáticamente del mismo tipo que la expresión gaussiana para la curvatura de una superficie, y esta expresión generalizada es lo que llamó la *medida de la* curvatura del espacio. Es posible mostrar representaciones visuales de un espacio curvo de más de dos dimensiones, pero tales ayudas a la perfección son tan útiles como puedan ser un par de muletas rotas para un hombre que no tenga piernas, pues no añade nada a la comprensión y son matemáticamente inútiles.

¿Por qué realizó Riemann toda esta labor y qué beneficios ha reportado? No intentaremos responder a lo primero, salvo decir que Riemann hizo lo que hizo porque su demonio le impulsó. Y brevemente enumeraremos algunas de las ventajas que se han obtenido de la revolución llevada a cabo por Riemann en el pensamiento geométrico. En primer término llevó la creación de "espacios" y "geometrías" en número ilimitado para fines específicos, uso en la dinámica o en la geometría pura, o en la ciencia física, dentro de las capacidades de los geómetras profesionales, y reunió enorme número de teoremas geométricamente importantes formando grupos compactos, que pueden ser tratados más fácilmente en su conjunto. En segundo término aclaró nuestro concepto del espacio, al menos en tanto que los matemáticos se ocupen del "espacio", y despojó a esa nulidad mística llamada espacio de su última sombra de misterio. Las enseñanzas de Riemann han mostrado a los matemáticos a desconfiar de cualquier Geometría o de cualquier espacio como una forma necesaria de percepción humana. Fue el último clavo en el ataúd del espacio absoluto y el primero en el de los "absolutos" de la física del siglo XIX.

Finalmente, la curvatura que Riemann definió, los procesos que ideó para la investigación de las formas diferenciales cuadráticas (las que dan la fórmula para el cuadrado de la distancia entre puntos próximos de un espacio de cualquier número de dimensiones), y su reconocimiento de que la curvatura es un invariante (en el sentido técnico explicado en los capítulos anteriores), encuentran sus interpretaciones físicas en la teoría de la relatividad. Si ésta ha llenado o no su fórmula final es otra cuestión; desde la relatividad, nuestro concepto de la ciencia física no es el que era antes. Sin la obra de Riemann esta revolución en el pensamiento científico hubiera sido imposible, a no ser que algún hombre hubiera creado posteriormente los conceptos y los métodos matemáticos que Riemann creó.

Capítulo Vigesimoséptimo
LA ARITMÉTICA, LO SEGUNDO

KUMMER Y DEDEKIND

Vemos, por tanto, que los factores primos ideales revelan la esencia de los números complejos, los hacen, por así decir, transparentes, y descubren su estructura cristalina interna.

E. E. Kummer.

Muchos de mis lectores quedarán grandemente disgustados al saber que por esta vulgar observación se revela el secreto de la continuidad.

R. Dedekind

Es un hecho curioso que aunque la Aritmética, la teoría de números, ha sido la madre fecunda de problemas más profundos y de métodos más poderosos que cualquier otra disciplina de la Matemáticas ha sido de ordinario considerada al margen del progreso principal, como un espectador más o menos indiferente de las grandes conquistas de la Geometría y del Análisis, particularmente en sus servicios a la ciencia física, y son pocos, relativamente, los grandes matemáticos de los últimos dos mil años que han dedicado sus más grandes esfuerzos al progreso de la ciencia del "número puro".

Muchas causas han determinado este extraño desprecio de lo que al fin y al cabo es la Matemática por excelencia. Entre éstas, tan sólo haremos notar las siguientes: la Aritmética actual está sobre un plano superior de dificultades intrínsecas respecto a los otros grandes campos de la Matemática; las aplicaciones inmediatas de la teoría de números a la ciencia son escasas y no fácilmente perceptibles en el razonamiento ordinario de los matemáticos creadores, aunque alguno de los más grandes se han dado cuenta de que la Matemática de la naturaleza será encontrada en definitiva en el comportamiento de los números enteros comunes; y, finalmente, es humano entre los matemáticos, al menos en algunos, incluyendo los más grandes, buscar la reputación y la popularidad dentro de su propia generación al cosechar los frutos más fáciles de un triunfo espectacular en el Análisis, la Geometría o la Matemática aplicada. Hasta Gauss sucumbió en la edad media de su vida.

La Aritmética moderna, después de Gauss, comenzó con Kummer. El origen de la teoría de Kummer en su intento para demostrar el último teorema de Fermat ya ha sido mencionado en otro lugar (Capítulo XXV). Algo más de la larga vida del hombre puede ser referido, antes de que nos ocupemos de Dedekind. Kummer era un típico alemán de la antigua escuela, con toda la tenaz simplicidad, bonachona naturaleza y buen humor que caracterizó una especie a punto de desaparecer. Ejemplares de museo podrán encontrarse aún, hace una generación, en cualquier jardín de una cervecería alemana de San Francisco.

Aunque Ernst Eduard Kummer (29 de junio 1810 - 14 de mayo 1893) nació cinco años antes de la declinación de Napoleón, el glorioso emperador de Francia desempeñó un importante, aunque inconsciente papel, en la vida de Kummer. Hijo de un médico de Sorau (perteneciente al principado de Brandenburgo, Alemania), Kummer perdió a su padre cuando tenia tres años. Los restos del gran ejército de Napoleón, al pasar a través de Alemania en su retirada, dejaron en ella el característico azote ruso del tifus, que se extendió fácilmente entre los higiénicos alemanes. El médico, sobrecargado de trabajo, contrajo la enfermedad, murió de ella y dejó a Ernst y a un hermano mayor al cuidado de su viuda. El joven Kummer creció en una terrible pobreza, pero su madre pudo lograr que su hijo ingresara en el Instituto local. La arrogancia y los abusos de la Francia napoleónica, no menos que el recuerdo de su padre, que la madre mantuvo vivo, hizo del joven Kummer un patriota extraordinariamente práctico, y con extraordinario placer dedicó gran parte de su soberbio talento científico a enseñar balística a los oficiales del ejército alemán en la Escuela de Guerra de Berlín. Muchos de sus discípulos dieron muestra de los conocimientos adquiridos en la guerra franco-prusiana.

Teniendo 18 años (1828), Kummer fue enviado por su madre a la Universidad de Halle para estudiar teología. Debido a su pobreza, Kummer no residía en la Universidad, sino que tenía que trasladarse a pie todos los días desde Sorau a Halle, llevando sus libros en una mochila. Respecto a sus estudios teológicos Kummer hace la interesante observación de que es más o menos una cuestión de casualidad o del ambiente que una mente con dotes para la especulación abstracta se dirija a la filosofía o a la Matemática. La casualidad en este caso fue la presencia en Halle de Heinrich Ferdinand Scherk (1798-1885) como profesor de Matemática. Scherk era más bien un hombre montado a la antigua, pero tenía entusiasmo por el Álgebra y por la teoría de números, que contagió al joven Kummer. Guiado por Scherk, Kummer pronto abandonó sus estudios morales y teológicos en favor de la Matemática. Repitiendo las palabras de Descartes, Kummer dijo que prefería la Matemática a la filosofía debido a que "los simples errores y los falsos conceptos no pueden intervenir en la Matemática". Si Kummer hubiera vivido actualmente quizá habría modificado su juicio, pues era un hombre de mente amplia, y las presentes tendencias filosóficas en la Matemática son algunas veces residuos curiosos de la teología medieval. En su tercer año de la Universidad Kummer resolvió un problema de Matemática para el que se había concedido un premio, y obtuvo su título de doctor (10 de septiembre de 1831) a la edad de 21 años. Como a la sazón no había cargos universitarios vacantes, Kummer comenzó su carrera como profesor en su antiguo Instituto.

En 1832 se trasladó a Liegnitz, donde enseñó durante diez años en el Instituto. Fue aquí donde inició a Kronecker en su revolucionaria carrera. Por fortuna Kummer no estaba en condiciones tan difíciles como aquéllas en que se encontró Weierstrass en circunstancias similares, y pudo ser capaz de pagar el franqueo para su correspondencia científica. Los matemáticos eminentes (incluyendo Jacobi), a quienes Kummer participó sus descubrimientos matemáticos, vieron que el joven genio profesor de Instituto, debería ser llevado a un cargo más elevado en la primera oportunidad, y en 1842 Kummer fue nombrado profesor de Matemática en la Universidad de Breslau. Allí enseñó hasta 1855, cuando la muerte de Gauss ocasionó una extensa modificación en el mapa matemático de Europa.

Se ha dicho que Dirichlet se hallaba contento en Berlín, entonces la capital matemática del mundo. Pero cuando Gauss murió, Dirichlet no pudo resistir la tentación de suceder al príncipe de los matemáticos, su primer maestro, como profesor en Göttingen. Hasta hoy la gloria de ser "un sucesor de Gauss" ha ejercido una atracción casi irresistible para los matemáticos, que podían ganar más en otros cargos, y hasta hace muy poco tiempo Göttingen era elegido por los mejores.

La estimación de que gozaba Kummer entre sus compañeros puede juzgarse por el hecho de que fue propuesto unánimemente para suceder a Dirichlet en Berlín. Desde que tenía 29 años había sido miembro correspondiente de la Real Academia de Berlín. Ahora (1855), sucedió a Dirichlet en la Universidad y en la Academia, y fue también nombrado profesor en la Escuela de Guerra de Berlín.

Kummer fue uno de esos raros genios científicos que muestran su capacidad para la Matemática más abstracta, para sus aplicaciones de los problemas prácticos, incluyendo la guerra, que es la menos práctica de todas las tonterías humanas y, finalmente, para la física experimental. Su obra más importante pertenece a la teoría de números, donde su profunda originalidad le llevó a invenciones de una importancia de primer orden, pero en otros campos, el Análisis, la Geometría y la física aplicada, su labor fue también sobresaliente.

Aunque las conquistas de Kummer en la Aritmética superior fueron de un tipo que justifica compararle con los creadores de la Geometría no euclidiana, tenemos la impresión, al examinar su larga vida de 83 años, que aunque sus investigaciones fueran espléndidas, no llegó a realizar todo lo que podía haber hecho. Posiblemente, su falta de ambición personal (un ejemplo será mencionado ahora), su genialidad tranquila y su amplio sentido del humor evitó que intentara batir su propio récord.

Mucho de lo que Kummer hizo en la teoría de números lo hemos dicho en el capítulo sobre Kronecker: *restituyó el teorema fundamental de Aritmética a aquellos campos numéricos algebraicos que surgen era el intento de probar el último teorema de Fermat y en la teoría gaussiana de la ciclotomía, y efectuó esta restitución mediante la creación de una especie de números completamente nueva, los llamados "números ideales".* Continuó también la obra de Gauss sobre la ley de reciprocidad bicuadrática, y buscó las leyes de reciprocidad para grados superiores al cuarto.

Como se ha mencionado en capítulos precedentes, los "números ideales" de Kimznier han sido ahora ampliamente desplazados por los "ideales" de Dedekind, que explicaremos cuando lleguemos a ellos, de modo que no es necesario intentar aquí la casi imposible proeza de explicar en lenguaje no técnico lo que son los "números" de Kummer. Pero lo que consiguió gracias a ellos puede ser expuesto con suficiente exactitud en un libro como el presente. Kummer *demostró* que

$$x^p + y^p = z^p$$

donde p es un primo, es imposible en enteros x, y, z diferentes de cero, para toda una clase muy extensa de primos p. No consiguió demostrar el teorema de Fermat para *todos los* primos; ciertos primos excepcionales escapaban de las redes de Kummer, y siguen escapando. De todos modos, el paso que dio superó en mucho a todos los dados por los predecesores de Kummer, y éste se hizo famoso casi a pesar suyo. Recibió un premio al cual no se había presentado.

El informe de la Academia Francesa de Ciencias para el concurso al "Gran Premio" en 1857 es el siguiente. "Informe sobre el concurso para el Gran Premio en Ciencia Matemática. El concurso fue abierto para el año 1853 y prorrogado para 1856. No habiendo encontrado la comisión una obra que sea digna del premio entre los que lo solicitaron propone a la Academia premiar a M. Kummer por sus bellas investigaciones sobre los números complejos compuestos de raíces de la unidad[1] y números enteros." La Academia aceptó esta proposición.

La primera obra de Kummer sobre el último teorema de Fermat está fechada en octubre de 1835. Esta obra fue seguida por nuevos trabajos en 1844 a 1847, el último de los cuales se tituló *Demostración del teorema sobre la imposibilidad de* $x^p + y^p = z^p$ *para un número infinito*[2]*, de primos p.* Continuó añadiendo perfeccionamientos a su teoría, incluyendo su aplicación a las leyes de reciprocidad superior, hasta 1874, cuando ya tenía 64 años.

Aunque estas investigaciones notablemente abstractas fueron el campo de su máximo interés, y aunque Kummer decía de sí mismo "para describir más exactamente mi actitud científica personal más exactamente, puedo considerarla como *teorética...;* me he dedicado particularmente a ese conocimiento matemático que encuentra su propia esfera en la Matemática, sin referencia a las aplicaciones". Kummer no era un estrecho especialista. Lo mismo que Gauss, parecía obtener igual placer en la ciencia pura que en la ciencia aplicada. Gauss, en efecto, fue, a través de sus obras, el maestro real de Kummer y el distinguido discípulo demostró su capacidad extendiendo la obra del maestro a las series hipergeométricas, añadiendo a lo que Gauss había hecho mejorías sustanciales que hoy son de gran utilidad en la teoría de las ecuaciones diferenciales que se presentan más frecuentemente en la física matemática.

Además, la magnífica obra de Hamilton sobre los sistemas de rayos (en óptica) inspiró a Kummer una de sus invenciones más bellas, la de la superficie de cuarto grado, que es conocida con su nombre, y que desempeña un papel fundamental en la Geometría del espacio euclidiano, cuando ese espacio es de cuatro dimensiones (en lugar de tres, como ordinariamente lo imaginamos), tal como sucede cuando se admite que los elementos irreductibles de que está constituido el espacio son líneas rectas en lugar de puntos. Esta superficie (y sus generalizaciones a espacios superiores) ocupó el centro del escenario en la Geometría del siglo XIX; encontrándose (por Cayley) que era representable (paramétricamente, véase capítulo sobre Gauss) por medio de las funciones periódicas cuádruples, a las cuales Jacobi y Hermite dedicaron sus mejores esfuerzos.

Muy recientemente (1934) Sir Arthur Eddington observó que la superficie de Kummer es una especie de pariente de la ecuación ondulatoria de Dirac en la mecánica cuántica (ambas tienen el mismo grupo finito; la superficie de Kummer es la superficie ondulatoria en el espacio de cuatro dimensiones).

Para completar el círculo, Kummer fue llevado, por su estudio de la sistemática de los rayos, a la física, e hizo importantes contribuciones a la teoría de la refracción atmosférica. En la Escuela de Guerra asombró al mundo científico al aparecer como un experimentador de primera categoría en

---

[1] Si $x^p + y^p = z^p$, entonces $x^p = z^p - y^p$, y descomponiendo $z^p - y^p$, en sus factores p de primer grado, tendremos

$$x^p = (z - y)(z - ry)(z - r^2y) \dots (z - r^{p-1}y)$$

en la que r es una raíz p-sima de unidad (diferente de l), o sea $t^p - 1 = 0$, con r no igual a 1. Los enteros algebraicos en el campo del grado p engendrado por r son los que Kummer introdujo en el estudio de la ecuación de Fermat, y que le llevó a la invención de sus "números ideales" para restablecer la factorización única en el campo; un entero en tal campo no es únicamente el producto de primos en el campo para todos los primos p.

[2] El "infinito" en el título de Kummer está aún (1936) injustificado; la palabra "gran" debe sustituir a la palabra "infinito".

su obra sobre balística. Coa su característico humor, Kummer se excusó por esta desviación a sus aficiones matemáticas. "Cuando abordo un problema experimentalmente, dijo a un joven amigo, es una prueba de que el problema es matemáticamente inexpugnable".

Recordando sus propias luchas de los primeros años, así como los sacrificios de su madre, Kummer no sólo fue un padre para sus discípulos, sino un hermano para los padres de sus alumnos. Millares de jóvenes agradecidos que habían recibido la ayuda de Kummer en la Universidad de Berlín y en la Escuela de Guerra, le recordaron siempre como un gran maestro y un gran amigo. En una ocasión, un joven matemático que se trasladaba a Berlín para obtener su título de doctor, se vio atacado de viruela, y tuvo que volver a su hogar, en Posen, cerca de la frontera rusa. Nada se sabía de él, pero era evidente que estaba sumido en la mayor pobreza. Cuando Kummer oyó decir que el pobre joven probablemente no podría lograr asistencia buscó a un amigo del estudiante, le dio el dinero necesario, y le envió a Posen para que hiciera lo que le fuera posible. En la enseñanza Kummer era famoso por recurrir a símiles vulgares y graciosos. Así, para dar importancia a un factor particular en una cierta frase dijo: "si descuidáis este factor sería como si un hombre que está comiendo una ciruela se tragase el hueso y escupiera la pulpa".

Los últimos nueve años de la vida de Kummer transcurrieron en completo aislamiento. "Nada se encontrará en mis trabajos póstumos", dijo, pensando en las numerosas obras que Gauss dejó para que fueran publicadas después de su muerte. Rodeado por su familia (,nueve hijos le sobrevivieron), Kummer abandonó la Matemática en su retiro, y, salvo algunos viajes a los lugares donde transcurrió su adolescencia, vivió en el más estricto aislamiento. Murió después de un breve ataque de gripe el 14 de mayo de 1893, cuando tenía 83 años.

El sucesor de Kummer en Aritmética fue Julius Wilhelm Richard Dedekind (más tarde prescindió de los dos primeros nombres), uno de los más grandes matemáticos y uno de los más originales que Alemania o cualquier otro país ha producido. Igual que Kummer, Dedekind tuvo una larga vida (6 de octubre de 1831 a 12 de febrero de 1916), y permaneció matemáticamente activo hasta poco antes de su muerte. Cuando murió, en 1916, Dedekind había sido una autoridad en Matemática durante toda una generación. Como Edmund Landau (un amigo y continuador de Dedekind en una parte de su obra) dijo en su discurso conmemorativo ante la Real Sociedad de Göttingen en 1917, "Richard Dedekind no sólo fue un gran matemático, sino uno de los más grandes en la historia de la Matemática, ahora y en el pasado, el último héroe de una gran época, el último discípulo de Gauss, que durante cuatro décadas fue el ejemplo no sólo de los que ahora trabajamos sino también de nuestros maestros y de los maestros de nuestros maestros".

Richard Dedekind, el menor de los cuatro hijos de Julius Levin Ulrich Dedekind, profesor de leyes, nació en Brunswick, el lugar del nacimiento de Gauss[3]. Desde la edad de siete años hasta los dieciséis, Richard estudió en la escuela secundaria de su ciudad natal. No dio pruebas precoces de su extraordinario genio matemático, pues sus primeros amores fueron la física y la química, y consideró la Matemática como la sirvienta o la fregona de las ciencias. Pero realmente no caminó en la oscuridad. Cuando tenía diecisiete años, al encontrar errores en los razonamientos de la física, se dirigió a la Matemática para hallar una lógica menos objetable. En 1848 ingresó en el Colegio Carolino, la misma institución que dio al joven Gauss una oportuni-

[3] No ha aparecido aún una buena biografía de Dedekind. Su vida debía haber sido incluida en el tercer volumen de sus obras completas (1932), pero no ocurrió así a consecuencia de la muerte del editor principal Robert Fricke. El relato que aquí aparece está basado sobre el discurso conmemorativo de Landau. Obsérvese que siguiendo la buena y vieja costumbre teutónica de algunos biógrafos alemanes, Landau omite toda mención de la madre de Dedekind. No hay duda de que de acuerdo con la teoría de las "tres k", defendida por el Káiser alemán y cordialmente admitida por Adolf Hitler, "todo el deber de una mujer está definido por las tres grandes k, Kissin, Kookin y Kids" [besos, cocina y niños]. Me agradaría conocer, al menos, el nombre de soltera de la madre del gran hombre.

dad para instruirse por sí mismo en Matemática. En el colegio, Dedekind aprendió los elementos de Geometría analítica, del Álgebra, del Cálculo y de la mecánica "superior". Estaba, pues, bien preparado para comenzar un estudio serio cuando ingresó en la Universidad de Göttingen en 1850, teniendo 19 años. Sus maestros principales fueron Moritz Abraham Stern (1807-1894), quien escribió ampliamente sobre la teoría de números, Gauss y Wilhelm Weber, el físico. De estos tres hombres Dedekind aprendió la base para el estudio del Cálculo infinitesimal, la Aritmética superior, los mínimos cuadrados, la geodesia superior y la física experimental.

En su vida posterior, Dedekind se lamentó que la instrucción matemática que se daba durante sus años de estudiante en Göttingen, aunque adecuada a las escasas exigencias necesarias para lograr el certificado de maestro, era pobre como preparación para una carrera matemática. Temas de vital interés no eran tocados, y Dedekind tuvo que emplear dos años de ardua labor después de obtener su título para instruirse por sí mismo en las funciones elípticas, la Geometría moderna, el Álgebra superior y la física matemática, materias todas que en aquel tiempo eran brillantemente explicadas en Berlín por Jacobi, Steiner y Dirichlet. En 1852 Dedekind obtuvo su título de doctor (a los 21 años) de manos de Gauss, por una breve disertación sobre integrales eulerianas. No hay necesidad de explicar qué son estas integrales; la disertación fue un trabajo útil e independiente, pero no delataba el genio como lo delata cualquier otra página de los muchos trabajos posteriores de Dedekind. La opinión de Gauss sobre la disertación tiene cierto interés: "La memoria preparada por Herr Dedekind se refiere a una investigación en el Cálculo integral, y no es en modo alguno una cosa vulgar. El autor muestra no sólo un buen conocimiento de estas importantes cuestiones, sino también una independencia de juicio que es un anuncio favorable de sus seguros triunfos. Como ensayo para ser admitido al examen encuentro esta memoria completamente satisfactoria". Evidentemente Gauss vio más en esta disertación que lo que descubrieron algunos de los críticos posteriores; posiblemente, su íntimo contacto con el joven autor le capacitó para leer entre líneas. De todos modos, el informe es más o menos el habitual y cortés documento para aceptar una disertación pasable, y no sabemos si Gauss realmente previó la penetrante originalidad de Dedekind.

En 1854 Dedekind fue nombrado *Privatdozent* en Göttingen, cargo que mantuvo durante cuatro años. A la muerte de Gauss, en 1855, Dirichlet se trasladó desde Berlín a Göttingen. Durante los tres años restantes de su permanencia en Göttingen, Dedekind asistió a las más importantes conferencias de Dirichlet. Más tarde, colaboró en el famoso tratado de Dirichlet sobre la teoría de números añadiendo a él el importantísimo "Suplemento undécimo", que contiene un esquema de su propia teoría de los números algebraicos. Fue también amigo del gran Riemann, que entonces comenzaba su carrera. Las conferencias universitarias de Dedekind fueron en su mayor parte elementales, pero en 1857-1858, dio un curso (a dos estudiantes, Selling y Auwers) sobre la teoría de Galois de las ecuaciones. Esta fue probablemente la primera vez que la teoría de Galois apareció formalmente en un curso universitario. Dedekind fue uno de los primeros en apreciar la importancia fundamental del concepto de grupo en Álgebra y Aritmética. En su primera obra Dedekind ya mostró dos de las principales características de su pensamiento, la abstracción y la generalización. En lugar de considerar un grupo finito desde el punto de vista de su representación mediante sustituciones (véase capítulo sobre Galois y Cauchy) Dedekind definió los grupos por medio de sus postulados (sustancialmente descritos en el capítulo XV), y buscó derivar sus propiedades de esta destilación de su esencia. A la manera moderna esto es abstracción, y por tanto, generalización. La segunda característica, la generalización, es justamente una consecuencia de la primera.

A la edad de 26 años Dedekind fue nombrado (en 1857) profesor ordinario en el Politécnica de Zurich, donde permaneció cinco años, volviendo en 1862 a Brunswick como profesor de la

Escuela Técnica Superior. Allí estuvo durante medio siglo. La tarea más importante para el biógrafo oficial de Dedekind, si es que llega tener alguno, será explicar el hecho singular de que Dedekind haya ocupado un cargo relativamente oscuro durante cincuenta años, mientras hombres muy inferiores a él desempeñaron cátedras importantes en la Universidad. Decir que Dedekind prefirió la oscuridad es una explicación como cualquier otra.

Hasta su muerte (1916), cuando tenía 85 años, Dedekind permaneció con la mente fresca y robusto de cuerpo. Jamás se casó, y vivió con su hermana Julie, conocida novelista, hasta su muerte en 1914. Su otra hermana Mathilde murió en 1860; su hermano fue un distinguido jurista.

Tales son los hechos de mayor importancia en la carrera material de Dedekind. Vivió tanto tiempo que aunque algunas de sus obras (su teoría del número irracional, que ahora explicaremos) ha sido familiar a todos los estudiosos del análisis durante una generación antes de su muerte, el propio Dedekind constituyó casi una figura legendaria, que muchos consideraron como una sombra. Doce años antes de su muerte, en el *Calendario para Matemáticos* de Teubner se dijo que Dedekind había muerto el 4 de septiembre de 1899, provocando el regocijo del supuesto muerto. "Quizá resulte exacto el día 4 de septiembre, escribía Dedekind, pero seguramente está equivocado el año. Me parece recordar que he pasado ese día en perfecta salud, gozando de una agradable conversación sobre "sistema y teoría" con mi huésped y excelente amigo George Cantor de Halle".

La actividad matemática de Dedekind se desarrolló casi completamente en el dominio de los números en su más amplio sentido. Sólo tenemos espacio para dos de sus grandes contribuciones, y describiremos primeramente su trabajo fundamental, el de la "cortadura de Dedekind", la teoría del número irracional, y por tanto los fundamentos del Análisis. Por ser de esencial importancia recordaremos brevemente la naturaleza de la cuestión. Si *a*, *b* son números enteros comunes, la fracción *a/b* se llama un *número racional; si* no existen números ente*ros m, n* tales que cierto "número" *N* sea expresable como *m/n,* entonces *N* se llama un *número irracional.* Así $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ son números, irracionales. Si se expresa un número irracional en forma decimal, los dígitos que siguen al punto decimal no presentan regularidades: no hay período que se repita, como en las representaciones decimales de un número racional, o sea 13/11 = 1.181818... donde el "18" se repite indefinidamente. Como entonces, si la representación carece completamente de ley ¿tenemos acaso una clara concepción de lo que es un número irracional? Eudoxio pensaba que la tenía y la definición de Dedekind de la igualdad de dos números, racionales o irracionales, es idéntica a la de Eudoxio (véase Capítulo II).

Si dos números racionales son iguales, no hay duda de que sus raíces cuadradas son iguales. Así, 2×3 y 6 son iguales, así, también, lo son $\sqrt{2\times3}$ y $\sqrt{6}$. Pero *no* es evidente que

$$\sqrt{2}\times\sqrt{3} = \sqrt{2\times3}$$

y por tanto que $\sqrt{2}\times\sqrt{3} = \sqrt{6}$. La no evidencia de esta simple igualdad aceptada, $\sqrt{2}\times\sqrt{3} = \sqrt{6}$, dada por admitida en la Aritmética elemental, es evidente si nos representamos lo que la igualdad implica: se extraen las raíces cuadradas "sin ley" de 2, 3, 6, las dos primeras se multiplican entre sí, y el resultado obtenido será igual a la tercera. Como ninguna de estas tres raíces se puede extraer exactamente, por muy grande que sea el número de cifras decimales que calculemos, es evidente que la comprobación por multiplicación jamás será completa. Toda la raza humana podría trabajar incesantemente durante toda su existencia, y jamás *probaría* de esta forma que $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$. Aproximaciones cada vez mayores a la igualdad podrían ser alcanzadas con el tiempo, pero nunca se llegaría al fin. Precisar estos conceptos de "aproximación" e "igualdad" y reemplazar nuestros primeros y toscos conceptos de los irracionales por descripciones más exactas que salven las dificultades indicadas, fue la tarea a que Dedekind se dedicó en el año 1870. Su trabajo sobre *Continuidad y Números irracionales* fue publicado en 1872.

El núcleo de la teoría de Dedekind de los números *irracionales* es su concepto de "cortadura". Una cortadura es una separación de *todos los* números racionales en *dos* clases, de modo que cada número de la *primera* clase sea *menor* que cada número de la *segunda* clase. Cada cortadura que no "corresponde" a un número racional "define" un número irracional. Este escueto enunciado necesita una elaboración, particularmente por el hecho de que incluso una exposición exacta, encierra ciertas dificultades sutiles enraizadas en la teoría del infinito matemático, que reaparecerán cuando consideremos la vida de Cantor, amigo de Dedekind.

Acéptese que se ha dado alguna regla tal que todos los números racionales se puedan agrupar en dos clases, o sea una clase "superior" y una clase "inferior", tales que todo número en la clase *inferior* es *menor que* todo número de la clase *superior.* (Tal suposición no pasaría actualmente sin ser discutida por las escuelas de filosofía matemática. Sin embargo, por el momento puede ser considerada como inobjetable).

Sobre esta suposición es posible una de las tres situaciones que se excluyen recíprocamente:

A. Puede haber un número en la clase *inferior* que sea mayor que cualquier otro número en esa clase.
B. Puede haber un número en la clase *superior* que sea menor que cualquier otro número en esa clase.
C. (C) Ninguno de los números *(mayor* en A, *menor* en B) descritos en (A), (B) puede existir.

La posibilidad que conduce a los números irracionales es (C). Si se mantiene (C), la regla admitida "define" una cortadura en el campo de todos los números racionales. Las clases superior e inferior se esfuerzan, por así decir, en encontrarse. Pero para que las clases se encuentren, hay que llenar la cortadura con algún "número", y por (C) no es posible ese relleno.

Aquí recurriremos a la intuición. Todas las distancias y medidas desde cualquier punto fijo a lo largo de una línea recta dada "corresponden" a "números" que "miden" las distancias. Si la cortadura se deja sin llenar, debemos describir la línea recta, que podemos concebir trazada por el movimiento continuo de un punto, como teniendo en ella una sima infranqueable. Esto viola nuestros conceptos intuitivos, de modo que decimos, por definición, que cada cortadura *define* un número. El número así definido no es racional; es irracional. Para proporcionar un esquema utilizable para actuar con los *irracionales* así *definidos por cortaduras* del tipo (C) consideraremos ahora la *clase inferior de los racionales* en (C) como equivalentes al irracional que define la cortadura.

Un ejemplo bastará. La raíz cuadrada *irracional* de 2 se define por la cortadura cuya clase superior contiene *todos los* números racionales positivos cuyos cuadrados son mayores que 2, y cuya clase inferior contiene *todos los* restantes números *racionales.*

Si el concepto algo ilusorio de la cortadura no agrada pueden ser sugeridos dos remedios: idear una definición de irracionales que sea menos mística que la de Dedekind y perfectamente utilizable; seguir a Kronecker y negar que exista números irracionales, reconstruyendo la

Matemática sin ellos. En el presente estado de la Matemática es conveniente alguna teoría de irracionales. Pero dada la naturaleza de un número irracional, parecería necesario comprender totalmente el infinito matemático antes de que sea posible una adecuada teoría de irracionales. El recurso de apelar a las clases infinitas es evidente en la definición de la cortadura de Dedekind. Tales clases conducen a graves dificultades lógicas.

Depende del nivel del refinamiento del matemático como individuo que considere estas dificultades como importantes o como triviales para el desarrollo consecuente de la Matemática. El valeroso análisis marcha audazmente a la cabeza, acumulando una Babel sobre otra, y confiando en que ningún Dios de la razón ultrajado le confundirá a él y a sus obras, mientras el lógico crítico, examinando cínicamente los cimientos del imponente rascacielos de su hermano, hace un rápido cálculo mental para predecir la fecha del derrumbe. Mientras tanto todos están atareados y gozosos. Pero una conclusión parece ser inevitable: Sin una teoría coherente del infinito matemático no hay teoría de irracionales; sin una teoría de irracionales no hay Análisis matemático en una forma que se parezca en algo al que ahora tenemos; y, finalmente, sin Análisis la mayor parte de la Matemática, incluyendo la Geometría y la mayor parte de la Matemática aplicada, tal como ahora existe cesaría de existir.

La tarea más importante con que se enfrentan los matemáticos parece ser, por tanto, la construcción de una teoría satisfactoria del infinito. Cantor intentó esto con el resultado que más tarde veremos. Por lo que se refiere a la teoría de Dedekind de los irracionales, su autor parece haber tenido algunos escrúpulos, pues dudó durante más de dos años antes de aventurarse a publicarla. Si el lector examina la definición de Eudoxio de "igual razón" (Capítulo II) verá que se presentan "dificultades infinitas", particularmente en la frase "equimúltiplos cualesquiera". De todos modos, se han hecho algunos progresos desde Eudoxio; estamos, al fin, comenzando a comprender la naturaleza de nuestras dificultades.

La otra contribución sobresaliente que Dedekind hizo al concepto del "número" fue en la dirección de los números algebraicos. Por lo que se refiere a la naturaleza del problema fundamental debemos recordar lo dicho en el capítulo sobre Kronecker respecto de los campos numéricos algebraicos y a la descomposición de *enteros* algebraicos en sus factores *primos.* La esencia del problema es que en alguno de tales campos la descomposición en factores primos *no es única,* como en Aritmética elemental. Dedekind restableció esta unicidad tan deseable por la invención de los que llamó *ideales.* Un ideal no es un número, sino una clase infinita de números, de modo que Dedekind venció también sus dificultades buscando refugio en el infinito.

El concepto de un ideal no es difícil de comprender, aun cuando exista una dificultad, *la clase más inclusiva divide a la menos inclusiva,* como ahora veremos que está en contra del sentido común. Sin embargo, el sentido común ha sido hecho para sufrir conmociones. Un ideal debe cumplir al menos dos cosas: debe dejar la Aritmética (racional) común substancialmente como es, y debe obligar a los recalcitrantes enteros algebraicos a obedecer esa ley fundamental de Aritmética, la descomposición *única* en primos, que esos números desafían.

El punto acerca de que una clase más inclusiva divida a una menos inclusiva se refiere al siguiente fenómeno (y a su generalización como veremos ahora). Consideremos el hecho de que 2 divide a 4, *aritméticamente,* es decir, *sin resto.* En lugar de este hecho evidente que no conduce a nada si es seguido en campos numéricos algebraicos, reemplazaremos 2 por la clase de *todos* sus múltiplos enteros..., - 8, - 6, - 4, - 2, 0, 2, 4, 6, 8... Por conveniencia denotaremos esta clase por (2). En la misma forma (4) denota la clase de *todos* los múltiplos enteros de 4. Algunos de los números en (4) son... - 16, - 12, - 8, - 4, 0, 8, 12, 16... Ahora es evidente que (2) es la clase más inclusiva; en efecto (2) contiene *todos* los números de (4), y además (para mencionar sólo dos) -6 y 6. El hecho que (2) contiene (4) se simboliza escribiendo (2)/(4). Puede apreciarse muy

fácilmente que si *m, n* son números enteros comunes cualesquiera, tendremos que *(m)/(n) cuando m, divide a n y sólo en este caso.*
Lo dicho puede sugerir que el concepto de divisibilidad aritmética común queda sustituido por el de inclusión de clase, tal como lo hemos explicado. Pero esta sustitución sería vana si no llegara a conservar las propiedades características de la divisibilidad aritmética. Podríamos observar detalladamente que las conserva, pero un ejemplo bastará. Si *m* divide *n y n* divide *l*, entonces *m* divide *l*; por ejemplo, 12 divide 24 y 24 divide 72, y 12 divide, en efecto, 72. Transferido a clases como antes, resulta: si *(m)/(n) y (n)/(l),* entonces *(m)/(l), o* sea, si la clase *(m)* contiene la clase *(n), y si* la clase (n) contiene la clase (*l*), entonces la clase *(m)* contiene la clase (*l*), lo que evidentemente es cierto. El resultado es que la sustitución de números por sus clases correspondientes responde a lo requerido cuando ampliamos la definición de "multiplicación": *(m) ´ (n)* se define como la clase *(mn);* (2) × (6) = (12). Obsérvese que lo último es una definición.
Los ideales de Dedekind para los números algebraicos son una generalización de lo que precede. Siguiendo su costumbre habitual, Dedekind dio una definición *abstracta*, es decir, una definición basada sobre propiedades esenciales más que sobre un modo contingente o particular de representar, o describir, la cosa definida.
Consideremos la serie (o clase) de *todos los enteros* algebraicos en un determinado campo numérico algebraico. En esta serie que todo lo incluye habrá subseries. Una subserie se llama un *ideal si* tiene las dos propiedades siguientes:

A. La *suma y diferencia* de dos enteros cualesquiera en la subserie están también en la subserie.
B. Si cualquier entero de la subserie se multiplica por cualquier entero de la serie que todo lo incluye, el entero resultante está en la subserie.

Un ideal es, pues, una clase infinita de enteros. Se apreciará fácilmente que *(m), (n),...* anteriormente definidos, son ideales de acuerdo con A, B. Como antes, si un ideal contiene otro, se dice que el primero divide al segundo.
Puede demostrarse que todo ideal es una clase de enteros todos los cuales son de la forma

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \ldots + x_n a_n$$

donde $a_1, a_2,.. a_n$ son enteros fijos del campo del grado *n* respectivo, y cada uno de los $x_1, x_2, \ldots x_n$ puede ser un entero cualesquiera siempre en el campo. Siendo así, es conveniente simbolizar un ideal mostrando sólo los enteros $a_1, a_2,.. a_n$, y esto se hace escribiendo $(a_1, a_2,.. a_n)$ como el símbolo del ideal. El orden en que $a_1, a_2,.. a_n$ están escritos en el símbolo carece de importancia.
Debemos ahora definir la "multiplicación" de ideales: el producto de los dos ideales: $(a_1, a_2,.. a_n)$, $(b_1, b_2,.. b_n)$, es el ideal cuyo símbolo es $(a_1b_1, ..., a_1b_n, ..., a_nb_n)$, en el cual se obtienen todos los productos posibles a_1b_1, etc., multiplicando un entero del primer símbolo por un entero del segundo. Por ejemplo, el producto de (a_1, a_2) *y* $b_1, b_2)$ es $(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)$. Siempre es posible reducir tal símbolo-producto (para un campo de grado *n)* a un símbolo que contenga a lo sumo *n* enteros.
Una breve observación final completará el resumen de la historia. Un ideal cuyo símbolo *sólo contenga* un entero, tal como (a_1), se llama un ideal *principal*. Usando como antes la notación $(a_1)/(b_1)$ para significar que (a_1) *contiene* (b_1), podemos ver sin dificultad que $(a_1)/(b_1)$ *cuando, y sólo cuando,* el entero *al divide* el entero b_1. Como antes, pues, el concepto de divisibilidad

aritmética es aquí, para los enteros algebraicos, completamente equivalente al de la inclusión de clase. Un ideal *primo* es aquel que no es "divisible por", incluido en cualquier ideal, salvo el ideal que todo lo incluye compuesto de *todos* los enteros algebraicos en el campo dado. Los enteros algebraicos son reemplazados ahora por sus ideales principales correspondientes, lo que demuestra que un ideal dado es un producto de ideales primos tan solo en una forma, precisamente como en el "teorema fundamental de la Aritmética" un entero racional es el producto de primos tan solo en una forma. Por la equivalencia antes mencionada de la divisibilidad aritmética para enteros algebraicos e inclusión de clase, el teorema fundamental de la Aritmética ha sido restablecido para los números enteros en campos numéricos algebraicos. Quien se detenga a meditar sobre las líneas generales de la creación de Dedekind podrá ver lo que este autor hizo, exige una visión penetrante y un talento superior por lo que se refiere a la capacidad de abstracción. Dedekind fue un matemático según la expresión de Gauss: "*At nostro quidem judicio hujusmodi veritates ex notionibus potius quam ex notationibus hauriri debeant*". (Pero en nuestra opinión tales verdades [aritméticas] deben ser derivadas de conceptos más que de notaciones). Dedekind confió más en su cabeza que en un ingenioso simbolismo y en las expertas manipulaciones de fórmulas para seguir adelante. Si hubo alguien que introdujera nuevos conceptos a la Matemática ese alguien fue Dedekind, y sus sabias preferencias para las ideas creadoras sobre los símbolos estériles se aprecian ahora mejor de lo que se apreció durante su vida. Cuando más tiempo viva la Matemática, más abstracta y, posiblemente también, más práctica se hará.

Capítulo Vigesimoctavo
EL ULTIMO UNIVERSALISTA

POINCARÉ

Un científico digno de este nombre, especialmente si es un matemático, experimenta en su labor la misma impresión que un artista; su placer es tan grande y de la misma naturaleza.
Henri Poincaré

En la *History of his life and times* el astrólogo William Lilly (1602 - 1681) recuerda un gracioso, aunque increíble relato de la forma cómo se conocieron John Napier (1550-1617), de Merchiston, el inventor de los logaritmos, y Henry Briggs (1561-1631) del Gresham College, Londres, quien calculó la primera tabla de logaritmos vulgares. Un tal John Marr, "excelente matemático geómetra", se trasladó "a Escocia antes que Briggs, con el fin de estar allí cuando estas dos personas tan doctas se encontrasen. Briggs, señaló cierto día para que se realizara la reunión en Edimburgo; pero fracasó, pues el señor Napier, sin duda, no pudo venir. Sucedió que un día John Marr y el señor Napier estaban hablando de Briggs: "Ah, John (dijo Merchiston), Briggs no vendrá ahora". En aquel momento llamaron a la puerta. John Marr se apresuró a abrir, y con gran satisfacción vio que era Briggs, a quien llevó a la sala de mi señor, *donde transcurrió casi un cuarto de hora* durante el cual se miraron uno a otro con admiración, *antes de que ninguno de los dos pronunciara una palabra".*
Recordando esta leyenda, Sylvester cuenta que él estuvo a punto de batir el récord mundial de Briggs de ilimitada admiración cuando en 1885 visitó al autor de numerosos trabajos asombrosamente maduros y maravillosamente originales de una nueva rama del Análisis, que habían estado inundando las revistas matemáticas desde el año 1880.
Sylvester confiesa que "pude darme cuenta de los sentimientos de Briggs en su entrevista con Napier cuando recientemente visité a Poincaré [1854-1912] en su gallinero aéreo de la calle Gay-Lussac... En presencia de ese poderoso depósito de fuerza intelectual, mi lengua se negó a cumplir su oficio, y hubo de pasar cierto tiempo (quizá fueron dos o tres minutos) antes de que me formara una idea de sus juveniles rasgos externos y me encontrara en condiciones de hablar".
En otra parte Sylvester recuerda su confusión cuando, después de haber subido los tres tramos de estrechos peldaños que conducían al "gallinero aéreo de Poincaré", se detuvo e inclinó su pelada cabeza contemplando con asombro a un muchacho "tan rubio y tan joven" como era el autor del diluvio de trabajos que había anunciado el advenimiento de un sucesor de Cauchy.
Una segunda anécdota puede dar cierta idea del respeto que ha merecido la obra de Poincaré a aquellos que estuvieron en condiciones de apreciar sus alcances. Interrogado por un inglés patriota de los tiempos de la primera gran guerra de aquellos que creían que era obligación de

todos los patriotas académicos exaltar a sus aliados y rebajar a sus enemigos: quién era el hombre más grande que Francia había producido en los tiempos modernos, Bertrand Russell contestó instantáneamente, "Poincaré". "¿Cómo?, ¡ese hombre!", exclamó su mal informado interlocutor creyendo que Russell se refería a Raymond Poincaré, Presidente de la República Francesa. "Oh, exclamó Russell cuando comprendió el error, yo pensaba en el primo de Raymond, Henri Poincaré".

Poincaré fue el último hombre que consideró como su reino toda la Matemática, tanto pura como aplicada. Se cree, de ordinario, que sería imposible para un ser humano actual comprender ampliamente y mucho menos hacer obra creadora en más de dos de las cuatro principales divisiones de la Matemática, la Aritmética, el Álgebra, la Geometría y el Análisis, por no decir nada de la astronomía y de la física matemática. Sin embargo, cuando en el año 1880 se iniciaba la gran carrera de Poincaré se creía, en general, que Gauss había sido el último de los universalistas matemáticos, y parecía imposible que el ambicioso joven pudiera dominar todo el campo de la Matemática.

A medida que la Matemática evoluciona se dilata y se contrae como los modelos del Universo de Lemaitre. Actualmente nos encontramos en una dilatación explosiva, y es absolutamente imposible para cualquier hombre llegar a familiarizarse con la enorme masa de trabajos matemáticos que han aparecido en el mundo desde el año 1900. Pero en ciertos sectores importantes se observa ya una saludable tendencia a la contracción. Así ocurre, por ejemplo, en Álgebra, donde la introducción de los métodos por postulados ha hecho el tema cada vez más abstracto, más general, y menos desconectado. Similitudes inesperadas, que en algunos casos llegan a la identidad enmascarada, están siendo descubiertas gracias a la nueva forma de abordar los temas, y es concebible que la próxima generación de algebristas no necesitará saber mucho de lo que ahora se considera de valor, cuando gran parte de las cuestiones particularmente difíciles se reúnan bajo un principio general más sencillo de amplio alcance. Algo de esto sucedió en la física matemática clásica cuando la relatividad dio de lado la complicada matemática del éter. Otro ejemplo de esta contracción en la época de la dilatación es el uso, que rápidamente va aumentando, del cálculo tensorial, en desmedro de las numerosas ramas especiales del análisis vectorial. Tales generalizaciones y condensaciones son muchas veces difíciles dé comprender por los hombres de más edad, pero al final suelen darse cuenta de que los métodos generales son esencialmente más sencillos y más fáciles de tratar que los múltiples e ingeniosos ardides ideados para los problemas especiales. Cuando los matemáticos dicen que una cosa como el cálculo tensorial es fácil, al menos en comparación con algunos de los algoritmos que le precedieron, no intentan parecer superiores ni misteriosos, sino que afirman una verdad que cualquier estudiante puede comprobar por sí mismo. Esta cualidad de generalización fue un rasgo instintivo en la vasta obra de Poincaré.

Si la abstracción y la generalización tienen manifiestas ventajas del tipo indicado, también es cierto que algunas veces presentan graves desventajas para quienes se interesan por los detalles. ¿Qué uso inmediato tiene para el físico saber que una ecuación diferencial particular que se plantea en sus trabajos es resoluble, pues así lo ha probado algún matemático puro, cuando ni él ni el matemático pueden realizar la labor hercúlea exigida por una solución numérica capaz de aplicación a problemas específicos?

Para citar un ejemplo, correspondiente aun campo en el que Poincaré hizo algunos de sus trabajos más originales, consideremos un fluido incompresible homogéneo, que se mantiene unido por la gravitación de sus partículas, y que gira alrededor de un eje. ¿En qué condiciones será el movimiento estable, y cuáles serán las posibles formas de ese fluido en rotación estable? Mac Laurin, Jacobi y otros autores han demostrado que ciertas elipsoides serán estables; Poincaré, usando métodos más intuitivos, "menos aritméticos", que sus predecesores, pensó que había determinado los criterios para la estabilidad de un cuerpo piriforme. Pero cometió un error. Sus métodos no estaban adaptados al cálculo numérico, y los investigadores posteriores, incluyendo G. H. Darwin, hijo del famoso Charles, sin atemorizarse por las terribles selvas de Álgebra y de Aritmética que debían ser exploradas antes de que pudiera alcanzarse una conclusión definida, buscaron una solución decisiva[1].

El hombre interesado en la evolución de las estrellas dobles se encuentra más cómodo si los hallazgos de los matemáticos se le presentan en una forma a la que pueda aplicar una máquina calculadora. Y desde el *fiat* de Kronecker de la "no construcción, no existencia", algunos matemáticos puros han sido menos entusiastas de lo que eran en los días de Poincaré por la existencia de teoremas que no son constructivos. El desprecio de Poincaré por la serie de detalles que exige la Matemática, y que deben resolverse antes de seguir adelante, fue una de las causas que más contribuyó a su universalidad. Otra fue su extraordinaria capacidad de comprensión para todo lo que se refiere a la teoría de funciones de variable compleja. En esto no tuvo igual.

Puede advertirse que Poincaré mostró su universalidad al descubrir conexiones hasta entonces no sospechadas entre distintas ramas de las Matemáticas, por ejemplo entre los grupos (continuos) y Álgebra lineal.

Antes de continuar con el relato de su vida, recordaremos uno de los rasgos más característicos de Poincaré. Pocos matemáticos han tenido una visión filosófica tan amplia como Poincaré y ninguno le ha superado en el don de exponer con claridad. Probablemente siempre estuvo profundamente interesado en las implicaciones filosóficas de la ciencia y de la Matemática, pero tan sólo en 1902, cuando su grandeza como matemático estaba más allá de toda duda, se sintió atraído por lo que pudiera llamarse la vulgarización de la Matemática, y se dejó llevar con un sincero entusiasmo por la idea de compartir con los no profesionales la significación e importancia humana del tema. Su preferencia por lo general frente a lo particular le ayudó para exponer ante los inteligentes profanos aquellos temas cuyos alcances matemáticos van más allá de la importancia técnica. Hace 20 ó 30 años podía verse en los jardines y en los cafés de París a obreros y vendedores leyendo ávidamente algunas de las obras maestras populares de Poincaré, en su edición barata. Las mismas obras, en ediciones más cuidadas, se encontraban sobre la mesa de trabajo de cualquier hombre culto. Estos libros fueron traducidos al inglés, al alemán, al español, al húngaro, al sueco y al japonés. Poincaré hablaba en lenguaje universal, fácilmente comprensible, de la Matemática y de la ciencia, y su estilo, muy peculiar, pierde mucho en la traducción.

Por el mérito literario de sus obras de vulgarización Poincaré recibió el máximo honor a que un escritor francés puede aspirar: ser miembro de la Sección literaria del Instituto. Algunos envidiosos novelistas han dicho rencorosamente que Poincaré obtuvo esta distinción, única para un hombre de ciencia, debido a que una de las funciones de la Academia literaria es la constante redacción de un diccionario de la lengua francesa, y el universal Poincaré era, sin duda, el hombre que podría ayudar a los poetas y a los autores dramáticos en su lucha para decir al mundo lo que son funciones automorfas. La opinión imparcial, basada en un estudio de los trabajos de Poincaré, está de acuerdo en que el matemático merecía esa distinción. Muy afín a su interés por la filosofía de la Matemática es su preocupación por la psicología de la creación matemática.

---

[1] Esta famosa cuestión del "cuerpo piriforme", de considerable importancia en cosmogonía, fue planteada en 1905 por Liapounoff, y sus conclusiones confirmadas por Sir James Jeans; encontraron que el movimiento es inestable. Pocos han tenido valor de comprobar los cálculos. Después de 1915, León Liechtenstein, compatriota de Liapounoff, abordó de un modo general el problema de las masas fluidas en rotación. El problema parece dar mala suerte, pues ambos tuvieron muertes violentas.

¿Cómo realizan los matemáticos sus descubrimientos? Poincaré nos narra más tarde sus propias observaciones sobre este misterio en una de las más interesantes descripciones de los descubrimientos personales que haya podido ser escrita. Según Poincaré los descubrimientos matemáticos suelen tener lugar después de un largo tiempo de ardua labor. Igual que en la literatura, según dice Dante Gabriel Rosetti, se necesita "cierta cantidad de trabajo cerebral fundamental" antes de que pueda madurar un poema, en la Matemática no se producen descubrimientos sin un profundo trabajo preliminar, pero esto no es, en modo alguno, todo lo necesario. Todas las "explicaciones" para proporcionar una receta en cuya virtud un ser humano pueda llegar a crear resultan sospechosas. La excursión de Poincaré a la psicología práctica, como algunas otras en la misma dirección, no llegó a proporcionar el vellocino de oro, pero al menor sugiere que tal cosa no es completamente mítica, y podrá algún día encontrarse el medio para que los seres humanos sean aún más inteligentes y capaces de comprenderse a sí mismos.
La herencia intelectual de Poincaré por ambos lado era satisfactoria. Tan sólo nos remontaremos a su abuelo paterno. Durante la campaña napoleónica de 1814, su abuelo, que tenía 20 años, fue agregado al hospital militar en Saint-Quentin. Establecido en Rouen, en el año 1817, se casó, y tuvo dos hijos: León Poincaré, nacido en 1828, que fue médico distinguido y miembro de una Facultad de medicina, y Antoine, que llegó a ser inspector general del Departamento de caminos y puentes. Henri, hijo de León, nació el 29 de abril de 1854, en Nancy, Lorena, y llegó a ser el mejor matemático de los primeros años del siglo XX; uno de los dos hijos de Antoine, Raymond, estudió leyes, y desempeñó la presidencia de la República Francesa durante la primera guerra mundial. El otro hijo de Antoine fue director de educación secundaria. Un tío abuelo, que siguió a Napoleón en la campaña de Prusia, desapareció y jamás se oyó hablar de él después de la derrota de Moscú.

De este árbol genealógico podría deducirse que Henri tendría que heredar cierta capacidad administrativa y política; pero no ocurrió así, salvo en su primera infancia, época en que inventaba los juegos para sus hermanas y amigos. En estos juegos su desempeño era limpio y escrupuloso, y cuidaba de que cada uno de los compañeros fuera fiel al papel que le correspondía. Esta es quizá la prueba más concluyente de que Poincaré era constitucionalmente incapaz de comprender los más sencillos principios de administración que su primo Raymond aplicó intuitivamente.

La biografía de Poincaré fue escrita detalladamente por su compatriota Gaston Darboux (1842-1917), uno de los principales geómetras de los tiempos modernos, en 1913 (el año siguiente a la muerte de Poincaré). Alguna cosa puede haber escapado al autor de este libro, pero parece que Darboux, después de referirse a la madre de Poincaré, diciendo que "procedía de una familia del distrito del Meuse cuyos padres vivieron en Arrancy, y era una persona muy buena, muy activa y muy inteligente", no llega a mencionar su nombre de soltera. Es posible que los franceses hayan hecho suya la doctrina de las tres K, recordada al ocuparnos de Dedekind, debido a la influencia que pudiera dejar Alemania en Francia desde 1870 a 1914. Sin embargo, de una anécdota narrada por Darboux, sería posible deducir que su nombre de familia *puede* haber sido Lannois. Sabemos que la madre dedicó toda atención a la educación de sus dos hijos pequeños, Henri y su hermana menor (cuyo nombre no se menciona). La hermana contrajo matrimonio con Emile Boutroux, y fue madre de un matemático que murió joven.

En parte debido a los constantes desvelos de la madre, el desarrollo mental de Poincaré fue extraordinariamente rápido. Aprendió a hablar muy precozmente, pero también de modo defectuoso, debido a que pensaba con tanta rapidez que no podía trasladar el pensamiento a la palabra. Desde su infancia su coordinación motora fue precaria. Cuando aprendió a escribir, se descubrió que era ambidextro, y que podía escribir o dibujar tan defectuosamente con su mano izquierda como con su mano derecha. Poincaré jamás se cuidó de esta torpeza física. A este respecto será también interesante recordar que cuando Poincaré fue reconocido como el más grande matemático y vulgarizador de la ciencia de su tiempo, se sometió a los *tests* Binet, haciendo el desagradable descubrimiento de que si se hubiera tratado de un niño, en lugar de ser el famoso matemático que era, los tests habrían demostrado que se trataba de un imbécil. Cuando tenía cinco años Henri sufrió un fuerte ataque de difteria complicado con parálisis laríngea, que persistió durante nueve meses. Este accidente dio lugar a que durante largo tiempo fuera delicado y tímido, pero después sacó fuerzas de flaqueza para dedicarse a los bruscos juegos propios de los niños de su edad.

Su diversión principal era la lectura, donde por primera vez se mostró su desusado talento. Una vez leído un libro, cosa que hacía con increíble velocidad, quedaba para siempre en su memoria, y podía citar la página y la línea donde se narrara un determinado acontecimiento. Conservó esta poderosa memoria toda su vida. Esta rara facultad, que Poincaré comparte con Euler, quien también la poseyó en menor grado puede ser llamada memoria visual o del espacio. En la memoria temporal, la capacidad para recordar con extraordinaria precisión una serie de sucesos acaecidos largo tiempo antes, era también extraordinariamente potente. Sin embargo, Poincaré suele calificar su memoria como "mala". Su defectuosa visión física contribuyó quizá a una tercera peculiaridad de su memoria. La mayoría de los matemáticos parece que recuerdan los problemas y fórmulas en su mayor parte de un modo visual, pero Poincaré los recordaba casi totalmente de un modo auditivo. Incapaz de ver distintamente la pizarra cuando era estudiante, se sentaba lejos y retenía lo que oía de un modo perfecto sin tomar notas: una hazaña fácil para él, pero incomprensible para la mayor parte de los matemáticos. Sin embargo, también debió tener una poderosa memoria de la "visión interna", pues gran parte de su obra, como una buena parte de la de Riemann, fue del tipo que supone una fácil intuición del espacio y una aguda representación psíquica. Su incapacidad para usar hábilmente sus dedos constituyó un obstáculo para los trabajos de laboratorio, y es de lamentar que cierta parte de sus estudios de física matemática no hayan estado tan cercanos a la realidad como hubiera ocurrido de haber dominado el arte de la experimentación. Si Poincaré hubiera sido en ciencia práctica lo que fue en la ciencia teórica, hubiera añadido un cuarto miembro al incomparable trío Arquímedes, Newton y Gauss.

No todos los grandes matemáticos han sido soñadores tan "distraídos" como la fantasía popular gusta de suponer. Poincaré fue una de las excepciones, pero sólo en cosas de poca importancia. A muchas personas, que en modo alguno pertenecen a la categoría de sabios abstraídos, les ocurre lo mismo, y no son pocos los mortales que después de haber comido en el restaurante guardan en su bolsillo el dinero con que debían pagar su cuenta.

Algunas de las "distracciones" de Poincaré quizá tienen una interpretación diferente. En una ocasión (Darboux no narra la historia, pero debería haberlo hecho, pues ilustra el carácter algo brusco de Poincaré en los últimos años), un distinguido matemático, se trasladó desde Finlandia a París para conversar con Poincaré de problemas científicos. Éste no abandonó su estudio para saludar al visitante cuando la sirvienta le notificó su llegada, sino que continuó paseando de un lado a otro, como era su costumbre cuando se dedicaba a la Matemática, durante tres largas horas. Durante este tiempo, el desconfiado visitante permaneció sentado en la sala próxima, separado del maestro tan sólo por unas delgadas cortinas. Finalmente, las cortinas se separaron durante un momento y apareció en la habitación la cabeza de búfalo de Poincaré. "*Vous me dérangez beaucoup*" (me molestáis extraordinariamente) explotó aquella cabeza, y desapareció. El visitante tuvo que renunciar a la entrevista, que era exactamente lo que deseaba el "abstraído" profesor.

Los estudios primarios de Poincaré fueron brillantes, aunque la Matemática no fuera la disciplina que atrajera al principio su interés. Su primera pasión fue la historia natural, y toda su vida continuó siendo amante de los animales. La primera vez que tomó un rifle en sus manos se disparó accidentalmente y mató a un ave sin que él se lo propusiera. Este accidente le afectó tanto que en su vida ulterior (salvo la época del servicio militar) se negó a tocar un arma de fuego. A la edad de nueve años dio la primera demostración de lo que iba a ser uno de sus mayores triunfos. El maestro de composición declaró que un breve ejercicio, original en su forma y en su fondo, que el joven Poincaré había compuesto constituía "una pequeña obra maestra", y lo conservó como uno de sus tesoros. Pero también aconsejó a su discípulo que fuera más convencional, más estúpido, si deseaba causar una buena impresión en los profesores de la escuela. Apartándose de los juegos bruscos propios de sus compañeros, Poincaré inventó los suyos. También fue un infatigable bailarín. Como aprendía sus lecciones con tanta facilidad como respiraba, empleó la mayor parte de su tiempo en diversiones y en ayudar a su madre en las tareas de la casa. En esa fase precoz de su carrera Poincaré ya mostró algunas de las más notables características de su facilidad para abstraerse del mundo. Frecuentemente se olvidaba de comer, y casi nunca recordaba si había o no desayunado.

La pasión por la Matemática se bosquejó en la adolescencia o poco antes (cuando tenía 15 años). Desde el principio mostró una particularidad que duró toda su vida: hacía sus operaciones matemáticas mentalmente, mientras paseaba inquieto, y sólo acudía al papel después de una madura meditación. La charla, ni los ruidos le perturbaban cuando estaba trabajando. En su vida ulterior escribió sus trabajos de un tirón, sin volver a leer lo que había escrito, o limitándose a tachar algunos párrafos. Cayley componía también sus trabajos de esta forma, y probablemente Euler hacía lo mismo. Algunos de los trabajos de Poincaré muestran signos de una composición apresurada, y él mismo decía que jamás había terminado un trabajo sin lamentarse de los errores de forma o de fondo. Muchos hombres que se han distinguido intelectualmente han tenido la misma sensación. La afición de Poincaré por los estudios clásicos, donde sobresalió, le enseñó la importancia que para un trabajo tiene la forma y la sustancia.

La guerra franco-prusiana estalló en Francia en 1870, cuando Poincaré tenía 16 años. Aunque era demasiado joven y demasiado débil para un servicio activo, Poincaré participó de todos los horrores, pues Nancy, donde vivía, sufrió la ola de la invasión, y el joven acompañó a su padre en sus visitas al hospital. Más tarde, pasando terribles dificultades, volvió con su madre y hermana a Arrancy para ver lo que había sucedido a sus abuelos paternos, en cuyos espaciosos jardines habían transcurrido, durante las vacaciones escolares, los días más felices de su infancia. Arrancy estaba cerca del campo de batalla de Saint-Privat. Para llegar a la ciudad hubieron que pasar a través de campos desiertos y quemados, sufriendo un "frío glacial". Al fin llegaron a su destino, encontrando que la casa había sido saqueada, "no sólo de las cosas de valor sino también de las cosas sin valor", siendo además profanada en la forma bestial bien conocida por los franceses durante la guerra de 1914. Los abuelos carecían de todo, y el alimento les era proporcionado por una pobre mujer que se había negado a abandonar las ruinas de su casucha y que insistía en compartir con ellos su modesta pitanza.

Poincaré jamás olvidó esto, ni tampoco olvidó la larga ocupación de Nancy por el enemigo. Fue durante la guerra cuando aprendió alemán. Ávido de saber lo que los alemanes decían de Francia y de sí mismo, Poincaré aprendió su lengua. Lo que vio y lo que aprendió de los relatos oficiales de los propios invasores le hicieron un ardiente patriota, pero, lo mismo que Hermite, jamás confundió la Matemática de los enemigos de su país con sus actividades más prácticas. Su primo Raymond, en cambio, jamás podía decir algo acerca de *les Allemands* sin reprimir un grito de odio. En el gran libro del infierno donde constan los balances de los odios de un patriota frente a

los de un patriota alemán, Poincaré puede ser colocado frente a Kummer, Hermite frente a Gauss, para obtener así el perfecto cero implicado en la famosa ley "ojo por ojo, diente por diente".
Siguiendo la habitual costumbre francesa, Poincaré aprobó sus primeros grados (bachiller en letras y en ciencias) antes de especializarse. Esos exámenes tuvieron lugar en 1871, cuando tenia 17 años, y estuvo a punto de ser reprobado en Matemática. Llegó tarde y azorado fracasó en una prueba tan extraordinariamente sencilla como es obtener la suma de una progresión geométrica convergente. Pero su fama le había precedido. "Cualquier estudiante que no fuera Poincaré hubiera sido reprobado", declaró el presidente del Tribunal.
Luego se preparó para los exámenes de ingreso en la Escuela de ingenieros de Montes, donde asombró a sus compañeros al obtener el primer premio en Matemática sin haberse molestado en tomar apuntes. Sus compañeros, creyéndole un farsante, le quisieron someter a una prueba, encargando a un estudiante de cuarto año que le presentara un problema matemático que les parecía particularmente difícil. Sin una aparente meditación Poincaré encontró la solución con rapidez, y siguió paseando, dejando cariacontecidos a sus burlones compañeros que se preguntaban: "¿Cómo ha hallado la solución?" No son pocos los que se han hecho la misma pregunta en otras condiciones similares de la carrera Poincaré. Jamás parecía meditar cuando sus colegas le presentaban una dificultad matemática: "la réplica venía como una flecha".
Al terminar este año pasó, ocupando el primer lugar, a la Escuela Politécnica. Varios son los relatos que se conservan de su examen. Unos dicen que cierto miembro del Tribunal, prevenido de que el joven Poincaré era un genio matemático, suspendió el examen durante tres cuartos de hora, para idear alguna difícil cuestión, una refinada tortura. Pero Poincaré la resolvió sin dificultad, y el inquisidor "felicitó cariñosamente al alumno, comunicándole que había obtenido la máxima calificación". Los resultados obtenidos por Poincaré frente a sus atormentadores parecen indicar que los profesores franceses de Matemática habían aprendido algo desde que arruinaren la vida de Galois y estuvieron a punto de hacer lo mismo con la de Hermite.
En la Politécnica, Poincaré se distinguió por su brillantez en la Matemática, por su extraordinaria incompetencia en todos los ejercicios físicos, incluyendo la gimnasia y las artes militares, y por su manifiesta incapacidad para dibujar algo que se pareciera a algún objeto terrenal o celestial. Esto era muy grave: Un cero en el examen de ingreso, aun que se tratara del dibujo, significaba ser expulsado de la Escuela. Los jueces estaban desconcertados: "...un cero es eliminatorio. En las restantes cosas (salvo el dibujo), Poincaré carece de rival. Si es admitido, será el primero: pero, ¿puede ser admitido?". Para que Poincaré fuera admitido los buenos jueces posiblemente colocaron un punto decimal antes del cero y un 1 después de él.
A pesar de esta ineptitud para los ejercicios físicos, Poincaré era extraordinariamente popular entre sus compañeros. Al final del año organizaron una exhibición pública de sus obras artísticas, cuidadosamente rotuladas en griego: "esto es un caballo..." y así sucesivamente. Pero la incapacidad de Poincaré para el dibujo también tuvo su lado serio cuando estudió Geometría; entonces perdió el primer lugar, ocupando el segundo puesto.
Al dejar la Politécnica en 1875, teniendo 21 años, Poincaré ingresó en la Escuela de Minas, con la intención de ser ingeniero. Sus estudios técnicos, aunque fielmente realizados, le dejaban ciertas horas de ocio que dedicaba a la Matemática, y mostró lo que había dentro de él abordando un problema general de ecuaciones diferenciales. Tres años después presentó una tesis sobre el mismo tema, pero refiriéndose a una cuestión más difícil y más general, a la Facultad de Ciencias de París, para aspirar al grado de doctor en ciencias matemáticas. "Vi clara, e inmediatamente, dice Darboux que fue llamado a examinar la obra, que la tesis era superior al tipo ordinario y merecía ampliamente ser aceptada. Seguramente contenía resultados suficientes para proporcionar material a algunas buenas tesis. Pero debo declarar, para que se tenga una idea exacta

de cómo Poincaré trabajaba, que muchos puntos necesitaban correcciones o explicaciones. Poincaré era un hombre dominado por la intuición. Una vez que llegaba a la cima, jamás volvía sobre sus pasos. Quedaba satisfecho pasando a través de todas las dificultades, y dejaba a los demás el trabajo de pavimentar las carreteras destinadas a conducir más fácilmente hasta la meta. Voluntariamente se sometió a hacer las correcciones que parecían necesarias, pero me explicó que tenía entonces otras muchas ideas en su cabeza, y que ya estaba ocupado con algunos de los grandes problemas cuyas soluciones nos pensaba dar".

Así, el joven Poincaré, como Gauss, se veía invadido, por un enjambre de ideas que llenaban su mente, pero, a diferencia de Gauss, su lema no era "Poco, pero maduro". Es una cuestión que queda por resolver si un hombre de ciencia creador que guarda los frutos de su labor tanto que algunos de ellos se estropean es más útil para el progreso de la ciencia, que los hombres impetuosos, que esparcen todo lo que cosechan, verde o maduro, para que la semilla pueda madurar si el terreno es apropiado o deshacerse cuando se trata de frutos endebles. Algunos piensan que es mejor lo primero, otros lo segundo. Como cualquier decisión está más allá de los criterios objetivos, dejamos a cada uno con su propia opinión[2].

Poincaré no estaba destinado a ser ingeniero de Minas, aunque durante su aprendizaje demostró que tenía al menos el valor para serlo. Después de la explosión de una mina, que produjo 17 víctimas, formó parte de la cuadrilla de salvamento. Pero la profesión no le resultaba agradable, y aprovechó la oportunidad de dedicarse a la Matemática cuando su tesis y sus primeros trabajos así lo permitieron. Su primer cargo académico lo obtuvo en Caen, el 1 de diciembre de 1879, como profesor de Análisis matemático. Dos años más tarde (teniendo 27 años) pasó a la Universidad de París, donde en 1886 fue ascendido al ser encargado del curso de mecánica y física experimental (esto último parece extraño dada la dificultad de Poincaré para los trabajos de laboratorio). Salvo con ocasión de sus viajes a los congresos científicos europeos y de su visita a los Estados Unidos, en 1904, para pronunciar conferencias en la exposición de St. Louis, Poincaré permaneció en París, como cabeza de la Matemática francesa.

El período creador de Poincaré se abre con su tesis de 1878 y termina con su muerte en 1912, cuando estaba en la cumbre de su capacidad. En este lapso relativamente breve de 34 años acumuló tal cantidad de trabajos que parece increíble si consideramos las dificultades que entrañan la mayor parte de ellos. Suman casi 500 trabajos sobre *nuevas* Matemáticas, tratándose en muchos casos de extensas memorias, y más de 30 libros, que se refieren prácticamente a todas las ramas de la física matemática, de la física teórica y de la astronomía teórica que existían en su época. No contamos aquí sus trabajos clásicos sobre la filosofía, de la ciencia y sus ensayos de vulgarización. Para dar una adecuada idea de esta inmensa labor sería necesario ser un segundo Poincaré, y, por tanto, elegiremos dos o tres de sus obras más célebres para hacer de ellas una breve descripción.

El primer triunfo de Poincaré tuvo lugar en la teoría de ecuaciones diferenciales, a las cuales aplicó todos los recursos del Análisis, que dominaba de un modo absoluto. Esta primera elección indica las inclinaciones de Poincaré hacia las aplicaciones de la Matemática, pues las ecuaciones diferenciales han atraído a enjambres de investigadores desde los tiempos de Newton, debido, principalmente, a que *tienen* gran importancia para la exploración del Universo físico. Los matemáticos "puros" algunas veces gustan imaginar que todas sus actividades son dictadas por sus propios gustos, y que las aplicaciones de la ciencia no tienen interés para ellos. De todos modos, algunos de los más puros entre los puros han dedicado sus vidas a las ecuaciones

[2] "No hay camino real que conduzca a la Geometría"; se dice que Menecmo., respondió a Alejandro el Grande, cuando éste deseaba aprender la Geometría apresuradamente

diferenciales, que aparecieron primeramente al trasladar las situaciones físicas al simbolismo matemático; y son precisamente estas ecuaciones, sugeridas en el terreno práctico, las que constituyen el núcleo de la teoría. Una ecuación particular sugerida por la ciencia puede ser generalizada por los matemáticos, y entonces ser devuelta a los científicos (con frecuencia sin una solución que ellos puedan usar) para ser aplicada a nuevos problemas físicos, pero en primero y último término el motivo es científico. Fourier resume esta tesis en un párrafo famoso que irrita a ciertos tipos de matemáticos, pero que Poincaré hizo suyo y siguió en gran parte de su obra.

"El estudio profundo de la naturaleza, declara Fourier, es la fuente más fecunda del descubrimiento de los matemáticos. Este estudio no sólo tiene la ventaja de excluir cuestiones vagas y cálculos vanos al ofrecer una meta definida a la investigación, sino que es también un medio seguro de moldear el Análisis y de descubrir aquellos elementos de él que es esencial conocer y que la ciencia debe siempre conservar. Estos elementos fundamentales son los que se repiten en todos los fenómenos naturales". A lo cual alguien puede replicar: No hay duda, pero ¿qué hacemos con la Aritmética considerada en el sentido de Gauss? Sin embargo, Poincaré siguió el consejo de Fourier, lo creyera o no -y hasta sus investigaciones en la teoría de números fueron más o menos remotamente inspiradas por otras más o menos cercanas a la Matemática de la ciencia física.

Las investigaciones sobre ecuaciones diferenciales le llevaron, en 1880, cuando Poincaré tenía 26 años, a uno de sus más brillantes descubrimientos, una generalización de las funciones elípticas (y de algunas otras). La naturaleza de una función periódica (uniforme) de una sola variable ha sido explicada repetidamente en capítulos anteriores, pero al referirnos a lo que hizo Poincaré podemos repetir lo esencial. La función trigonométrica *sen z* tiene el período 2π, o sea, $sen\,(z + 2\pi) = sen\,z$; es decir, cuando la variable z aumenta en 2π, la función seno de z toma su valor inicial. Para una función elíptica, $E(z)$, existen *dos* períodos distintos, o sea p_1 y p_2, tal que $E(z + p_1) = E(z)$, $E(z + p_2) = E(z)$ *y Poincaré* encontró que la *periodicidad* es simplemente un caso especial de una propiedad más general: el valor de las funciones se restablece cuando la variable es reemplazada por una cualquiera de una infinidad *numerable* de transformaciones lineales de sí misma, y todas estas transformaciones forman un grupo. Algunos símbolos aclararán este juicio.

Supongamos que z se sustituye por $\dfrac{az+b}{cz+d}$. Entonces, para una *infinidad numerable* de series de valores de *a, b, c, d,* existen funciones de *z*, es decir *F(z)* es una de ellas tal que

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = F(z)$$

Además, si a_1, b_1, c_1, d_1 *y* a_2, b_2, c_2, d_2 son dos series cualesquiera de valores de *a, b, c, d, y si z se* reemplaza por $\dfrac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ *y luego* por $\dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$, dando *por* ejemplo $\dfrac{Az+B}{Cz+D}$ entonces no sólo tenemos

$$F\left(\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\right) = F(z)$$
$$F\left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\right) = F(z)$$

sino también

$$F\left(\frac{Az + B}{Cz + D}\right) = F(z)$$

Además, la serie de todas las sustituciones

$$z \to \frac{az + b}{cz + d}$$

(la flecha se lee "es reemplazada por") que deja el valor de *F(z)* invariable como justamente se explica *forma un grupo:* el resultado de la sucesiva realización de dos sustituciones en la serie

$$z \to \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$$
$$z \to \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

está en la serie; existe una "sustitución idéntica" en la serie, o sea z'→ z (aquí $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$*); y,* finalmente, cada sustitución tiene una "inversa" única, es decir, para cada sustitución en la serie existe otra única que, si se aplica a la primera, producirá la sustitución idéntica. En resumen, utilizando la terminología de los capítulos anteriores, vemos que *F(z)* es *una función que es invariante en un grupo infinito de transformaciones lineales.* Obsérvese que la infinidad de sustituciones es una infinidad numerable, como primero se enuncia: las sustituciones pueden ser contadas 1, 2, 3,... y *no* son tan numerosas como los puntos de una línea. Poincaré construyó realmente tales funciones, y desarrolló sus propiedades más importantes en una serie de trabajos a partir de 1880. Tales funciones son llamadas *automorfas.*

Sólo necesitamos hacer aquí dos observaciones para indicar lo que Poincaré consiguió con esta maravillosa creación. Primero, su teoría comprende la de las funciones elípticas como un caso particular. Segundo, como dijo el distinguido matemático francés George Humbert, Poincaré encontró dos memorables proposiciones que "le dieron las claves del cosmos algebraico".

Dos funciones automorfas[3] invariantes en el mismo grupo están relacionadas por una ecuación algebraica.

[3] Poincaré llamó a algunas de sus funciones "fuchsianas", del nombre del matemático alemán Lazarus Fuchs (1833-1902), uno de los creadores de la teoría moderna de ecuaciones diferenciales, por razones sobre las que no necesitamos detenernos. A otras las denominó "kleinianas", del nombre de Félix Klein, en irónico reconocimiento de discutida prioridad

Inversamente, las coordenadas de un punto sobre cualquier curva algebraica se pueden expresar por medio de funciones automorfas y, por tanto, por funciones uniformes de un parámetro.
Una curva algebraica es aquella cuya ecuación es del tipo $P(x, y) = 0$, donde $P(x,y)$ es un polinomio en x e y. Como un simple ejemplo, la ecuación del círculo cuyo centro está en el origen, (0, 0), y cuyo radio es a, es $x^2 + y^2 = a^2$. De acuerdo con la segunda "clave" de Poincaré debe ser posible para expresar x, y como funciones automorfas de un solo parámetro, t. Esto es; si $x = a \cos t$ e $y = a \operatorname{sen} t$, entonces, elevando al cuadrado y sumando eliminaremos t (puesto que $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$), y encontramos $x^2 + y^2 = a^2$. Pero las funciones trigonométricas cos t, $\operatorname{sen} t$ son casos especiales de funciones elípticas, que, a su vez, son casos especiales de funciones automorfas.
La creación de esta vasta teoría de funciones automorfas fue una ele las muchas cosas asombrosas que Poincaré hizo en el Análisis antes de cumplir los *30* años. Tampoco dedicó todo su tiempo al Análisis, pues también atrajeron su atención la teoría de números, algunas partes del Álgebra y la astronomía matemática. Al principio dio a la teoría gaussiana de las formas cuadráticas binarias (véase capítulo sobre Gauss) una forma geométrica, particularmente atractiva para aquellos que como Poincaré prefieren el método intuitivo. Esto, como es natural, no fue todo lo que hizo en Aritmética superior, pero las limitaciones del espacio impiden nuevos detalles.
Una labor de este calibre no podía pasar inadvertida. A la desusada edad de 32 años (en 1887), Poincaré fue elegido miembro de la Academia. Su proponente dijo algunas cosas muy atinadas acerca de él, pero la mayor parte de los matemáticos suscribieron principalmente esta verdad: "la obra de Poincaré está por encima de todo elogio, y nos recuerda inevitablemente lo que Jacobi escribía de Abel: que había planteado cuestiones que antes de él no había sido imaginadas. Debe, en efecto, reconocerse que hemos sido testigos de una revolución en Matemática comparable en cualquier respecto a la que tuvo lugar hace medio siglo con la aparición de las funciones elípticas".
Dejar la obra de Poincaré en la Matemática pura en este momento, es como levantarse de un banquete inmediatamente después de haberse sentado ante la mesa, pero debemos ocuparnos ahora de otra faceta de su universalidad.
Desde el tiempo de Newton y sus sucesores inmediatos la astronomía ha proporcionado generosamente a los matemáticos más problemas que los que podía resolver. Hasta finales del siglo XIX las armas usadas por los matemáticos en su estudio de la astronomía fueron prácticamente simples perfeccionamientos de las inventadas por Newton mismo, Euler, Lagrange y Laplace. Pero a través del siglo XIX, particularmente después de que Cauchy desarrollara la teoría de funciones de una variable compleja y de las investigaciones de dicho autor y de otros sobre la convergencia de las series infinitas, la labor de los matemáticos puros ha ido acumulando un enorme arsenal de armas todavía no ensayadas. Para Poincaré, a quien el Análisis le resultaba tan fácil como el pensar, este vasto cúmulo de Matemática todavía no utilizado, le parecía muy adecuado para emplearlo en una nueva ofensiva contra los problemas sobresalientes de la mecánica celeste y de la evolución planetaria. Eligió las armas que le parecieron mejores, las perfeccionó, inventó otras nuevas y atacó la astronomía teórica en una forma tan amplia como no había sido atacada durante un siglo. Modernizó el ataque; en efecto su campaña fue tan extraordinariamente moderna para la mayoría de los especialistas en mecánica celeste que hasta en nuestros días, cuarenta años o más después de que Poincaré inició su ofensiva, pocos han dominado sus métodos, y algunos, incapaces de tender su arco, insinúan que son inútiles para un ataque práctico. De todos modos, a Poincaré no le faltaron continuadores, cuyas conquistas hubieran sido imposibles para los hombres de la era anterior a él.

El primer gran triunfo de Poincaré (1889) en astronomía matemática se debió a un fracasado ataque al problema de *n* cuerpos. Para $n = 2$ el problema había sido completamente resuelto por Newton; el famoso problema de tres cuerpos ($n = 3$) será mencionado más tarde; cuando *n* supera a tres, algunas de las reducciones aplicables al caso n = 3 pueden ser realizadas.
Según la ley newtoniana de la gravitación, dos partículas de masas *m, M* a la distancia *D*, se atraen entre sí con una fuerza proporcional

$$a\frac{m \times M}{D^2}$$

Imaginemos *n* partículas materiales distribuidas de cualquier manera en el espacio; las masas, los movimientos iniciados y la distancia recíproca de todas las partículas se suponen que son conocidas en un determinado instante. Si se atraen de acuerdo con la ley newtoniana, *¿cuáles serán sus posiciones y movimientos (velocidades) después de un determinado tiempo?* Para los propósitos de la astronomía matemática las estrellas de un grupo o de una galaxia o de un grupo de galaxias se pueden considerar como partículas materiales que se atraen de acuerdo con la ley newtoniana. El problema de *n* cuerpos se reduce, en una de sus aplicaciones, a preguntarse cuál será el aspecto del cielo dentro de un año o dentro de un billón de años, aceptándose que tenemos datos suficientes de observación para describir ahora la configuración general. El problema, como es natural, se complica extraordinariamente por la radiación, las masas de las estrellas no permanecen constantes durante millones de años; pero una solución completa del problema de *n* cuerpos en su forma newtoniana probablemente daría resultados de una exactitud suficiente para todos los fines humanos, la raza humana probablemente se extinguirá antes de que la radiación pueda provocar inexactitudes observables.
Este era sustancialmente el problema propuesto para el premio ofrecido por el rey Oscar II de Suecia, en 1887. Poincaré no resolvió el problema, pero en 1889 le fue otorgado el premio por un tribunal compuesto por Weierstrass, Hermite y Mittag-Leffler, como recompensa a su discusión general de las ecuaciones diferenciales de la dinámica y a su estudio sobre el problema de los tres cuerpos. Este último es de ordinario interés considerado como el caso más importante del problema de *n* cuerpos, pues la Tierra, la Luna y el Sol proporcionan un ejemplo del caso $n = 3$. A este respecto, Weierstrass escribía a Mittag-Leffler: "Podréis decir a vuestro soberano que esta obra no da la solución completa de la cuestión propuesta, pero, de todos modos, tiene tal importancia que su publicación inaugurará una nueva era en la historia de la mecánica celeste. El objeto que Su Majestad se proponía al plantear la cuestión puede, por tanto, considerarse que ha sido alcanzado". Para no ser menos que el rey de Suecia, el gobierno Francés hizo a Poincaré caballero de la Legión de Honor, una distinción menos generosa que las 2.500 coronas y la medalla de oro del rey sueco.
Ahora podemos referir algunas particularidades de la reciente historia del problema de los tres cuerpos. Desde los tiempos de Euler ha sido considerado como uno de los problemas más difíciles en todo el campo de la Matemática. Enunciado matemáticamente, el problema se reduce a resolver un sistema de nueve ecuaciones diferenciales simultáneas (todas lineales y de segundo orden). Lagrange consiguió reducir este sistema a uno más sencillo. Como la mayoría de los problemas físicos, la solución no hay que esperarla en términos *finitos; si existe una solución* será dada por *series infinitas.* La solución existirá si esas series satisfacen las ecuaciones (formalmente) y además convergen para ciertos valores de las variables. La dificultad central es

demostrar la convergencia. Hasta 1905 se habían encontrado diversas soluciones especiales, pero no se pudo demostrar la existencia de alguna que pudiera ser llamada general.

En 1906 y 1909 se produjo un considerable avance en el lugar donde menos se esperaba: un país que los refinados europeos todavía consideran hoy como relativamente civilizado, especialmente por su terca costumbre de pagar sus deudas, y que muchos americanos despreciaban, creyendo que se hallaba en las mismas condiciones que en la Edad de Piedra, hasta que Paavo Nurmi corrió en los Estados Unidos. Exceptuando tan solo el caso raro en que los tres cuerpos chocan simultáneamente, Karl Frithiof Sundman, de Helsingfors, utilizando métodos analíticos debidos al italiano Levi-Civita y al francés Painlevé, con una ingeniosa modificación original, *demostró* la existencia de una solución en el sentido antes descrito. La solución de Sundman no se adapta al cálculo numérico ni tampoco proporciona muchas informaciones referentes al verdadero movimiento, pero este no es el punto que aquí interesa: un problema que no se creía fuera soluble, resultaba que lo es. Muchos se han esforzado desesperadamente en demostrar esto. Cuando la prueba fue dada, no faltó quien se apresuró a señalar que Sundman no había hecho nada de particular, pues no había resuelto más problema que el planteado. Este tipo de crítica es tan común en Matemática como en literatura y en arte, y muestra, una vez más, que los matemáticos son seres humanos como cualesquiera otros.

La obra más original de Poincaré en astronomía matemática queda resumida en su gran tratado *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (tres volúmenes, 1892, 1893, 1899). Este tratado fue seguido por otra obra en tres volúmenes (1905, 1910) de una naturaleza de más inmediata utilidad, *Leçons de mécanique céleste, y un* poco más tarde por la publicación de su curso de conferencias *Sur les figures d'équilibre d'une masse fluide,* y de un libro de crítica histórica *Sur les hypothéses cosmogoniques.*

De la primera de estas obras, Darboux (secundado por muchos otros) declara que inicia, en efecto, una nueva era en la mecánica celeste, y que es comparable a la *Mécanique céleste* de Laplace, y a la primera obra de D'Alembert sobre la precesión de los equinoccios. Darboux dice: "Siguiendo el camino de la mecánica analítica abierto por Lagrange... Jacobi estableció la teoría que parecía ser una de las más completas en la dinámica. Durante cincuenta años vivimos de los teoremas del ilustre matemático alemán, que los aplicó y estudió desde todos los puntos de vista, pero sin añadir nada esencial. Fue Poincaré quien conmovió por primera vez estas rígidas estructuras donde la teoría parecía estar encastillada; abriendo nuevas perspectivas y nuevas ventanas al mundo externo. Introdujo o utilizó, en el estudio de los problemas dinámicos, diferentes conceptos: El primero, que ha sido mencionado antes, y que, de todos modos, no es aplicable únicamente a la mecánica, consiste en las *ecuaciones de variación, o* sea ecuaciones diferenciales lineales que determinan soluciones de un problema muy cercano a una solución dada; el segundo, el de los *invariantes integrales,* que pertenecen enteramente a él y desempeñan un papel capital en estas investigaciones. Nuevos conceptos fundamentales pueden añadirse a estos, especialmente los referentes a las soluciones llamadas periódicas, según las cuales los cuerpos cuyo movimiento es estudiado vuelven después de cierto tiempo a sus posiciones iniciales y a sus velocidades relativas originales".

Esto último inició un nuevo y completo campo de la Matemática, la investigación de las *órbitas periódicas:* dado un sistema de planetas o de estrellas, con una completa determinación de las posiciones iniciales y de las velocidades relativas de todos los miembros del sistema en una cierta época, se quiere determinar en qué condiciones el sistema volverá a su estado inicial en una época posterior, y cómo continuará repitiendo indefinidamente el ciclo de sus movimientos. Por ejemplo, ¿es el sistema solar de este tipo recurrente?, o si no lo es, ¿estará aislado y no sometido a perturbaciones por la acción de los cuerpos externos? No hay ni que decir que el problema general no ha sido aun completamente resuelto.

Gran parte de las investigaciones astronómicas de Poincaré fue más bien cualitativa que cuantitativa, como corresponde a un hombre guiado por la intuición, y esta característica le condujo, como a Riemann, al estudio del Análisis situs. Sobre este tema publicó seis famosas memorias que revolucionaron la cuestión, tal como se planteaba en su época. El trabajo sobre el Análisis situs, a su vez, fue fácilmente aplicado a la Matemática de la astronomía.

Ya hemos aludido a la obra de Poincaré sobre el problema de los cuerpos fluidos en rotación de manifiesta importancia en cosmogonía, donde se acepta que si los planetas fueran suficientemente iguales, tales cuerpos podrían ser considerados como si realmente lo fueran sin incurrir en absurdos. Tenga o no importancia esta cuestión para la matemática del problema, es indudable que tiene interés por sí misma. Algunos párrafos de los trabajos de Poincaré indicarán más claramente que cualquier otra aclaración la naturaleza de la Matemática que él introdujo en esta difícil cuestión.

"Imaginemos un cuerpo fluido (en rotación) que se contrae por enfriamiento, pero con suficiente lentitud para permanecer homogéneo y para que la rotación sea la misma en todas sus partes.

"Al principio la forma será aproximadamente la de una esfera, y la figura de esta masa se hará un elipsoide de revolución que se aplastará cada vez más hasta que en un cierto momento se transformará en un elipsoide con tres ejes desiguales. Más tarde la figura cesará de ser un elipsoide y tomará forma de pera, hasta que al fin la masa, estrangulándose cada vez más, se separará en dos cuerpos diferentes y desiguales.

"La hipótesis precedente seguramente no puede ser aplicada al sistema solar. Algunos astrónomos han pensado que puede ser verdadera para ciertas estrellas dobles, y que las estrellas dobles del tipo de la Beta de la Lira pueden presentar formas de transición análogas a aquellas de que hemos hablado".

Luego sugiere hacer una aplicación a los anillos de Saturno, y pretende haber demostrado que los anillos sólo pueden ser estables si su densidad supera 1/16 de la de Saturno. Podemos recordar que estas cuestiones no quedaron completamente establecidas hasta el año 1935. En particular, un ataque matemático más drástico sobre el pobre y anciano Saturno pareció demostrar que no había sido vencido por los grandes matemáticos, incluyendo a Clerk Maxwell, que le habían sometido a estudio en los últimos setenta años. Una vez más debemos dejar el banquete apenas gustados algunos platos, y pasar a la voluminosa obra de Poincaré en física matemática. Aquí su estrella no fue tan buena. Hubiera podido aprovechar su magnífico talento de haber nacido treinta años más tarde, o si hubiera vivido 20 años más. Tuvo la desgracia de actuar cuando la física había llegado a uno de sus repetidos remansos y Poincaré se hallaba totalmente saturado con las teorías del siglo XIX cuando la física comenzó a recobrar su juventud después de que Planck, en 1900, y Einstein, en 1905, realizaron la difícil y delicada operación de injertar al cuerpo decrépito su primer par de nuevas glándulas, y por ello Poincaré apenas pudo hacer otra cosa que digerir el milagro antes de su muerte en 1912. Durante toda su vida Poincaré parecía absorber los conocimientos a través de sus poros sin un esfuerzo consciente. Como Cayley, no sólo fue un creador fecundo, sino también un profundo erudito. Su campo de acción era probablemente más amplio que el de Cayley, pues Cayley jamás pretendió comprender todo lo que se estaba haciendo en su época en Matemática aplicada. Esta erudición única puede haber sido una desventaja al tratarse de una cuestión de ciencia viva opuesta a la clásica.

Todo lo que se cocía en el puchero de la física era comprendido instantáneamente por Poincaré, que hacía de tales resultados el tema de sus investigaciones puramente matemáticas. Cuando fue inventada la telegrafía sin hilos, estudió el problema y planteó su matemática. Mientras otros

ignoraban la obra de Einstein sobre la teoría (especial) de la relatividad o la consideraban como una simple curiosidad, Poincaré ya estaba atareado con su matemática, y fue el primer hombre de ciencia de prestigio que comprendió lo que era Einstein y la significación de la nueva era que él preveía aunque y a no pudiera intervenir Lo mismo ocurrió cuando Planck formuló su teoría de los cuantos. Las opiniones, como es natural, difieren, pero a la distancia se comienza a comprender que la física matemática fue para Poincaré lo que Ceres para Gauss, y aunque Poincaré cumplió en el campo de la física matemática una labor, suficiente para labrar la reputación de media docena de hombres, no era una cuestión para la que hubiera nacido, y la ciencia habría logrado aún más de él de haberse dedicado simplemente a la Matemática pura. En efecto, sus trabajos astronómicos no son nada extraordinarios. Pero la ciencia ya había sido bien servida, y un hombre del genio de Poincaré puede tener sus diversiones.
Pasemos ahora a la última fase de la universalidad de Poincaré, para la que tenemos espacio: su interés por la racionalización de la creación matemática. En 1902 y 1904, el periódico matemático suizo *L'Enseignement Mathématique* abrió una encuesta para conocer los hábitos de trabajo de los matemáticos. Se enviaron cuestionarios a buen número de matemáticos, de los cuales respondió un centenar. Las respuestas a las preguntas y un análisis de las opiniones generales fueron publicadas, finalmente, en 1912[4]. (quien desee penetrar en la "psicología de los matemáticos" encontrará muchas cosas interesantes en esta obra única, y numerosas confirmaciones de los conceptos a que Poincaré había llegado independientemente antes de conocer los resultados del cuestionario. Algunos puntos de interés general pueden ser referidos antes de citar las opiniones de Poincaré.
El interés precoz por la Matemática de quienes más tarde llegaron a ser grandes matemáticos ya ha sido frecuentemente mencionado en los capítulos anteriores. A la pregunta "¿en qué período... y en qué circunstancias empezó usted a ocuparse de la Matemática?" 93 replicaron a la primera parte. De ellos 35 dijeron que antes de los 10 años; 43 entre los 11 y los 15; 11 entre los 16 y los 18; 3 entre los 19 y 20, existiendo un rezagado que comenzó a los 26.
Además, quien tenga amigos matemáticos se habrá dado cuenta de que algunos de ellos gustan trabajar en las horas de la mañana (conozco un matemático muy distinguido que comenzaba su labor a la inhumana hora de las cinco de la madrugada), mientras otros no hacen nada hasta después del crepúsculo. Las contestaciones a este punto indican una curiosa tendencia, posiblemente significativa, aunque existen numerosas excepciones: los matemáticos de las razas del norte prefieren trabajar por la noche; en cambio los latinos prefieren la mañana. Entre los trabajadores nocturnos la prolongada concentración provoca muchas veces insomnio, y por ello, al pasar los años, se ven obligados, aunque con repugnancia, a trabajar por las mañanas. Félix Klein, que trabajaba día y noche cuando era joven, indicó una vez una forma posible de resolver esta dificultad. Uno de sus discípulos americanos se quejaba de no poder dormir pensando en la Matemática: "¿No podéis dormir?, replicó Klein: ¿para qué está el cloral?" Sin embargo, este remedio no puede ser recomendado, y probablemente no habrá sido ajeno al trágico derrumbe de Klein.
Probablemente, la parte más importante de las respuestas se refería a si debe darse la preferencia a la inspiración o al trabajo tenaz como fuente de los descubrimientos matemáticos. La conclusión es que "los descubrimientos matemáticos, pequeños o grandes... jamás han nacido por generación espontánea. Siempre presuponen un terreno sembrado de conocimientos preliminares y bien preparado por el trabajo, consciente y subconsciente".

[4] *Enquête de "L'Enseignement Mathématique" sur la méthode de travail des mathématiciens"*. Publicada también en forma de libro (8 + 137 págs.), por Gauthier-Villars. París

Quienes, como Thomas Alva Edison, declaran que el genio es 99 de transpiración y 1 % de inspiración no son contradichos por quienes inviertan las cifras; ambos, tienen razón. Hay quienes insisten sobre el trabajo tenaz, otros lo olvidan completamente con la emoción del descubrimiento aparentemente repentino, pero ambos, cuando analizan sus impresiones admiten que sin el intenso trabajo y sin un destello de "inspiración", no se habría hecho el descubrimiento. Si bastase el trabajo, ¿cómo es que muchos glotones de la áspera labor, que parecen conocer todo lo que se ha escrito acerca de alguna rama de la ciencia y son excelentes críticos y comentadores, ,jamás llegan a hacer un descubrimiento? En cambio, quienes creen en la "inspiración" como el único factor en el descubrimiento o la invención, científica o literaria, pueden encontrar muy instructivo el examen de algunas de las primeras redacciones de los poemas "completamente espontáneos" de Shelley, que han sido conservadas y reproducidas, o leer las versiones sucesivas de cualquiera de las grandes novelas con que Balzac amargaba a su enloquecido editor.

Poincaré expone sus conceptos sobre el descubrimiento matemático en un ensayo publicado en 1908 y reproducido en su *Science et Méthode*. La génesis del descubrimiento matemático, dice, es un problema que podría interesar profundamente a los psicólogos, pues es la actividad en la que la mente humana parece deber menos al mundo externo, y comprendiendo el proceso del pensamiento matemático podemos llegar a lo que hay más esencial en la mente del hombre. ¿Cómo es posible, se pregunta Poincaré, que existan personas que no comprenden la Matemática? "Esto nos sorprendería, o más bien podría sorprendernos si no estuviéramos habituados a ello". Si la Matemática está basada únicamente sobre las reglas de la lógica, como todas las mentes normales aceptan y sólo algún loco niega (según Poincaré), ¿cómo es posible que haya muchas personas impermeables a la Matemática? A esto podría responderse que no se han emprendido experimentos demostrativos de que la incompetencia matemática sea lo normal en el ser humano. "Y además, pregunta Poincaré, ¿cómo es posible el error en Matemática?" Alexander Pope responde: "Errar es humano", lo cual es una solución tan poco satisfactoria como cualquier otra. La química del sistema digestivo puede tener alguna relación con todo esto, pero Poincaré prefiere una explicación más sutil, que no puede ser comprobada alimentando el "cuerpo vil" con haxix y alcohol.

"La respuesta me parece evidente" declara Poincaré. La lógica tiene muy poco que ver con el descubrimiento o la invención, y la memoria interviene con sus ardides. La memoria, sin embargo, no es tan importante como parecería. Su propia memoria, confiesa Poincaré, era mala: ¿"Por qué entonces no me ha abandonado en un difícil razonamiento matemático en que la mayor parte de los jugadores de ajedrez (cuya memoria se supone excelente) se perderían? Evidentemente debido a que era guiado por el curso general del razonamiento. Una demostración matemática no es una simple yuxtaposición de silogismos; trátase de silogismos *dispuestos en cierto orden, y el* orden es más importante que los elementos mismos". Si se tiene la "intuición" de este orden la memoria no hace falta, pues cada silogismo va tomando automáticamente su lugar en la sucesión.

La creación matemática, sin embargo, no consiste simplemente en hacer combinaciones de cosas ya conocidas: "Cualquiera puede hacer esto, pero las combinaciones así practicadas serían infinitas en número, y la mayor parte de ellas completamente desprovistas de interés: Crear consiste precisamente en evitar las combinaciones inútiles y realizar aquellas que son útiles y que constituyen tan sólo una pequeña minoría. Invención es discernimiento, selección". Pero, ¿no se ha repetido esto mismo millares de veces? ¿Qué artista no sabe que la selección, un algo intangible, es uno de los secretos del triunfo? Estamos exactamente donde nos hallábamos antes de que la investigación comenzara.

Para concluir esta parte de las observaciones de Poincaré podemos señalar que mucho de lo que dijo está basado sobre una suposición que podrá ser cierta, pero para la cual no existe una partícula de prueba científica. Simplemente acepta que muchos de los seres humanos son matemáticamente imbéciles. Aunque se aceptara esto, no necesitamos admitir sus teorías puramente románticas. Pertenecen a la literatura inspirada y no a la ciencia. Pasando a otras cosas menos discutidas, citaremos los famosos párrafos en que Poincaré describe cómo se produjo en él una de sus más grandes "inspiraciones". Nos referimos a su teoría de la creación matemática. Dejaremos al lector que juzgue por sí mismo.

Poincaré señala que no es necesario que sean comprendidos los términos técnicos para seguir su narración. Lo que tiene interés para el psicólogo no es el teorema, sino las circunstancias.

"Durante 15 días luché para demostrar que no pueden existir funciones análogas a aquellas que yo llamé desde entonces funciones fuchsianas; entonces era muy ignorante. Todos los días me sentaba ante la mesa de trabajo, donde permanecía una hora o dos. Intentaba gran número de combinaciones y no llegaba a ningún resultado. Una noche, contra de mi costumbre, tomé café negro. No pude dormir, y las ideas invadían mi mente, pareciendo que chocaban, hasta que, por así decir, un par de ellas se reunieron para formar una combinación estable. Por la mañana establecí la existencia de una clase de funciones fuchsianas, derivadas de las series hipergeométricas. Tan sólo tuve que escribir los resultados, lo que me llevó algunas horas.

"Luego deseé representar esas funciones por el cociente de dos series; esta idea era perfectamente consciente y elaborada; la analogía con las funciones elípticas me guiaba. Me pregunté cuáles debían ser las propiedades de estas series si es que existían, y sin dificultad construí las series que llamé thetafuchsianas.

"Más tarde dejé Caen, donde estaba viviendo a la sazón, para participar en un viaje geológico organizado por la Escuela de Minas. La preparación del viaje me hizo olvidar mis trabajos matemáticos. Llegado a Coutances tomamos un ómnibus para realizar una excursión. En el instante de poner el pie en el estribo surgió una idea al parecer desligada de mis pensamientos anteriores que me habían preparado para ella, la de que las transformaciones que había usado para definir las funciones fuchsianas eran idénticas a las de la Geometría no euclidiana. No realicé la comprobación, pues no tenía el tiempo necesario, y en el ómnibus reanudé una conversación interrumpida; pero, a pesar de ello, tuve la sensación de su certeza. Al volver a Caen comprobé los resultados para satisfacer mi conciencia.

"Entonces emprendí el estudio de ciertas cuestiones aritméticas sin progresar aparentemente, y sin sospechar que tales cuestiones podrían tener alguna relación con mis estudios anteriores. Disgustado con los resultados obtenidos deseé pasar algunos días a orillas del mar, pensando en alguna otra cosa. Un día, mientras paseaba por la costa, surgió la idea con las mismas características de espontaneidad, brevedad y seguridad absoluta, la de que las transformaciones de las formas cuadráticas ternarias indefinidas eran idénticas a las de la Geometría no euclidiana.

"Al volver a Caen reflexioné sobre este resultado y deduje sus consecuencias; el ejemplo de las formas cuadráticas me mostraba que existían otros grupos fuchsianos aparte de los correspondientes a las series hipergeométricas. Vi que podía aplicarlos a la teoría de las funciones thetafuchsianas, y que por tanto existían funciones thetafuchsianas diferentes de las derivadas de las series hipergeométricas, las únicas que yo conocía hasta entonces. Como es natural, me entregué a la tarea de construir todas estas funciones. Llevé a cabo una serie sistemática y, una después de otra, fueron cayendo vencidas. Existía, sin embargo, una que aun se mantenía, y cuya caída irse llevaría a la conquista de toda la posición. Pero todos mis esfuerzos tan sólo sirvieron para familiarizarme con la dificultad que era sin duda importante. Toda esta obra fue perfectamente consciente.

"En este momento me dirigí a Mont-Valérien, donde tenía que prestar mi servicio militar. Me veía, pues, sometido a diferentes preocupaciones. Un día, mientras cruzaba el bulevar, se me apareció repentinamente la solución de la dificultad que me había detenido. No comencé a trabajar inmediatamente, y sólo después de terminado mi servicio militar me dediqué a la cuestión. Tenía todos los elementos, y sólo necesitaba reunirlos y ordenarlos. Así pude escribir mi memoria definitiva de un tirón y sin dificultad".

Otros muchos ejemplos de este tipo podían encontrarse en su obra, así como en la obra de otros matemáticos, como puede verse en *L'Enseignenaent Mathématique*. De sus experiencias deduce que esta "iluminación repentina es un signo manifiesto de un largo trabajo subconsciente anterior". Y Poincaré procede a elaborar su teoría de la mente subconsciente y de su intervención en la creación matemática. La obra consciente es necesaria, como una especie de disparador que hace explotar la dinamita acumulada que el subconsciente ha estado acumulando. No emplea estas palabras, pero lo que dice significa lo mismo. Mas, ¿qué se gana para la explicación racional si siguiendo a Poincaré encomendamos a la mente subconsciente las actividades que deseamos emprender? Dotar a este misterioso agente con un tacto hipotético que le capacite para discriminar entre las "extraordinariamente numerosas" combinaciones posibles presentadas para su examen, y tranquilamente decir que el "subconsciente" rechaza todas excepto las combinaciones "útiles" debido a que tiene un sentimiento de simetría v de belleza, resulta tan sospechoso como resolver el problema inicial dándole un nombre más expresivo. Quizá sea esto lo que Poincaré supone, pues él definió una vez la Matemática como el arte de dar el mismo nombre a diferentes cosas; de modo que aquí podría haber redondeado la misma cosa. Parece extraño que un hombre que podía quedar satisfecha con tal "psicología" de la invención matemática fuese completamente escéptico en cuestiones religiosas. Después del brillante desliz de Poincaré en la psicología, se puede permitir a los escépticos que no crean en nada.

Durante la primera década del siglo XX la fama de Poincaré aumentó con rapidez, y fue considerado, especialmente en Francia, como un oráculo en todas las cuestiones matemáticas. Sus opiniones sobre toda clase de cuestiones, desde la política a la ética, eran ordinariamente rectas y breves, siendo aceptadas por la mayoría. Como sucede casi invariablemente después de la muerte de un gran hombre, la asombrosa reputación de Poincaré durante su vida pasó por un período de eclipse parcial en la década siguiente. Pero su intuición para lo que probablemente iba a ser de interés para la generación venidera ha quedado justificada. Para citar un ejemplo, entre muchos, diremos que Poincaré fue un vigoroso opositor a la teoría de que toda la Matemática se podía escribir con los conceptos más elementales de la lógica clásica; algo más que la lógica se necesita para producir la Matemática. Aunque no fue tan lejos como va la escuela intuicionista, parece haber creído que, al menos, algunos conceptos matemáticos preceden a la lógica; y si una ciencia se deriva de la otra, es la lógica la que procede de la Matemática, y no al contrario.

Salvo la enfermedad que le atormentó durante sus últimos cuatro años, la atareada vida de Poincaré fue tranquila y feliz. Todas las sociedades doctas del mundo le colmaron de honores, y en 1906, teniendo 52 años, alcanzó la más alta distinción posible a un hombre de ciencia francés, la presidencia de la Academia de Ciencias. Ninguno de estos honores modificó su carácter, y Poincaré siguió siendo humilde y sencillo. Sabía que no tenía rival en los años de su madurez, pero también podía decir, sin una sombra de afectación, que no sabía nada comparado con lo que podía saber. Tuvo un matrimonio feliz del que nacieron un hijo y tres hijas que le proporcionaron una gran dicha, especialmente durante su infancia. Su mujer era biznieta de Étienne Geoffroy Saint-Hilaire, el enemigo del belicoso anatómico Cuvier. Una de las pasiones de Poincaré era la música sinfónica.

Durante el Congreso Matemático Internacional de 1908, celebrado en Roma, Poincaré no pudo leer, debido a una enfermedad, su interesante (aunque prematuro) discurso sobre *El futuro de la física matemática*. Padecía hipertrofia de la próstata, de la que fue tratado por los cirujanos italianos, y pensó que había quedado completamente curado. Al volver a París reanudó su labor tan enérgicamente como antes. Pero en 1911 comenzó a tener el presentimiento de que no viviría mucho, y el 9 de diciembre escribió al editor de una revista matemática preguntándole si aceptaría un trabajo no terminado, contrariamente a la costumbre corriente, sobre un problema que Poincaré consideraba de la mayor importancia: "...a mi edad quizá no me sea posible resolverlo, pero los resultados obtenidos, capaces de llevar a muchos investigadores por nuevos e inesperados caminos, me parecen llenos de promesas, a pesar de las desilusiones que me han causado, y no me puedo resignar a sacrificarlos..." Empleó la mayor parte de dos estériles años intentando vencer sus dificultades.

Una prueba del teorema que se planteaba le había capacitado para hacer un notable progreso en el problema de los tres cuerpos, en particular le había permitido demostrar la existencia de una infinidad de soluciones periódicas en casos más generales que los hasta entonces considerados. La prueba deseada fue obtenida poco después de la publicación de la "Sinfonía Inconclusa" de Poincaré por un joven matemático americano, George David Birkhoff (1884).

En la primavera de 1912 Poincaré recayó en su enfermedad, siendo sometido a una segunda operación el 9 de julio. La operación dio buen resultado, pero el 17 de julio, Poincaré murió repentinamente de una embolia, mientras le estaban curando. Tenía 59 años y se hallaba en la cima de su capacidad, "el cerebro viviente de las ciencias racionales", según las palabras de Painlevé.

Capítulo Vigesimonoveno
¿PARAÍSO PERDIDO?

CANTOR

La Matemática, como todos los restantes temas, debe ser ahora sometida al microscopio, y revelar al mundo cualquier debilidad que pueda existir en sus fundamentos.

F. W. Westaway

La discutida *Mengenlehre* (teoría de conjunto creada en 1874 - 1895 por Georg Cantor (1845 - 1918) puede muy bien ser considerada, por su orden cronológico, como la conclusión de toda la historia. Este tema es un ejemplo, en la Matemática, del colapso general de aquellos principios que los profetas del siglo XIX, previendo todas las cosas, pero no el gran cataclismo, creyeron que constituían los fundamentos de todas las cosas desde la ciencia física a los gobiernos democráticos.

Si "colapso" es quizá una palabra demasiado fuerte para describir la transformación del mundo que está teniendo lugar, de todos modos es cierto que la evolución de las ideas científicas se está produciendo ahora tan vertiginosamente que no puede distinguirse la evolución de la revolución. Sin los errores del pasado, como un foco de perturbación profundo, la presente revolución en la ciencia física quizá no hubiera sucedido; pero atribuir a nuestros predecesores toda la inspiración que mueve a nuestra propia generación es concederles más de lo debido. Este punto es digno de consideración, pues algunos han estado tentados de decir que la "revolución" correspondiente en el pensamiento matemático, cuya iniciación ahora se aprecia claramente, es simplemente un eco de Zenón y de otros hombres presos de la duda en la antigua Grecia.

Las dificultades de Pitágoras acerca de la raíz cuadrada de 2 y las paradojas de Zenón sobre la continuidad (o "divisibilidad infinita") son, por lo que sabemos, los orígenes de nuestro actual cisma matemático. Los matemáticos actuales que prestan cierta atención a la filosofía (o fundamentos) de su disciplina se descomponen al menos en dos bandos, que al parecer no podrán reconciliarse, sobre la validez del razonamiento utilizado en el Análisis matemático, y este desacuerdo se remonta a través de los siglos hasta la Edad Media, y de aquí a la Antigua Grecia. Todas las facetas han tenido sus representantes en todas las épocas del pensamiento matemático, sea que tal pensamiento haya sido disfrazado por las paradojas, como en el caso de Zenón, o por sutilezas lógicas, como en el caso de los más amargados lógicos de la Edad Media. La raíz de estas diferencias es considerada comúnmente por los matemáticos como una cuestión de temperamento: cualquier intento de convertir a un analista como Weierstrass en el escepticismo de un hombre como Kronecker es tan vano como intentar convertir a un fundamentalista cristiano en un ateo rabioso.

Algunos datos concernientes a esta disputa suelen servir como estimulante, o sedante, según los gustos, para nuestro entusiasmo acerca de la singular carrera intelectual de Georg Cantor, cuya "teoría positiva del infinito" dio lugar en nuestra propia generación, a la más fiera batalla de ranas y ratones (como Einstein la llamó una vez) en la historia acerca de la validez del razonamiento matemático tradicional.

En 1831 Gauss expresó su "horror al infinito real" del siguiente modo: "Protesto contra el uso de la magnitud infinita como una cosa completa, que jamás puede permitirse en Matemática. Infinito es simplemente una forma de hablar, y la verdadera significación es un límite al que ciertas razones se aproximan indefinidamente, mientras otras aumentan sin restricción".

Por tanto, si x es un número real, la fracción $1/x$ disminuye a medida que x aumenta, y podremos encontrar un valor de x tal que $1/x$ difiera de cero en menos de una cantidad dada (que no es cero) que puede ser tan pequeña como nos plazca, y cuando x continúa aumentando, la diferencia permanece menor que esta cantidad dada; el *límite* de $1/x$ "cuando x tiende a infinito" es cero. El símbolo del infinito es ∞; la afirmación $1/\infty$ = cero carece de sentido por dos razones: "la división por infinito" es una operación *indefinida*, y, por tanto, no tiene significación; la segunda razón fue enunciada por Gauss. De modo análogo $1/0 = \infty$ carece de significación.

Cantor está de acuerdo y en desacuerdo con Gauss. Escribiendo en 1886 sobre el problema del infinito actual, (lo que Gauss llamó completo), Cantor dice que "a pesar de la diferencia esencial entre los conceptos del "infinito" *potencial y actual,* el primero significa una magnitud finita *variable,* que aumenta más allá de todos los límites finitos (como x en $1/x$ antes mencionado), mientras el último es una magnitud *constante, fija.,* más allá de todas las magnitudes finitas, y ambos son con frecuencia confundidos".

Cantor sigue diciendo que el abuso del infinito en Matemática ha inspirado con razón un horror al infinito entre los matemáticos concienzudos de su época, precisamente como ocurría con Gauss. De todos modos, Cantor mantiene que la "repulsa falta de crítica del legítimo infinito actual es una violación de la naturaleza de las cosas (cualquiera pueda ser, no parece que ha sido revelada a la, humanidad como un todo), que deben ser tomadas como son. Cantor, se alinea así definitivamente con los grandes teólogos de la Edad Media, de los cuales era un ardiente admirador y un profundo conocedor.

Las certidumbres absolutas y las soluciones completas de los viejos problemas siempre pasan mejor si se sazonan bien antes de tragarlos. He aquí lo que Bertrand Russell dijo en 1901 acerca del estudio del infinito, propio de Prometeo, realizado por Cantor:

"Zenón se refería a tres problemas... Tratábase del problema de lo infinitesimal, de lo infinito y de la continuidad... Desde su época a la nuestra, los mejores talentos de cada generación han atacado a su vez estos problemas, pero, hablando en términos generales, no han logrado nada .... Weierstrass, Dedekind y Cantor... los han resuelto completamente. Sus soluciones... son tan claras que no dejan lugar a la menor duda. Esta conquista es probablemente la más importante de que la época puede jactarse... El problema de lo infinitesimal fue resuelto por Weierstrass, la solución de los otros dos fue comenzada por Dedekind y definitivamente acabada por Cantor"[1].

El entusiasmo de sus párrafos nos contagia actualmente, aunque sabemos que Russell en la segunda edición (1924) de su obra, y A. N. Whitehead en sus *Principia Matemática,* admiten que no todo va bien con la cortadura de Dedekind (véase Capítulo XXVII), que es la columna vertebral del Análisis. Tampoco marcha bien actualmente. Más se ha dicho en pro o en contra de un credo particular en la ciencia de la Matemática durante una década que lo que fue realizado en un siglo durante la Antigüedad, en la Edad Media o el Renacimiento. Muchos más hombres de

[1] Citado por R. L Moritz, *Memorabilia Mathemalica, 1914.* La fuente original no he podido encontarla.

talento abordan actualmente los problemas científicos matemáticos sobresalientes que los que lo hicieron anteriormente, y la finalidad ha venido a ser la propiedad privada de los fundamentalistas. Ninguna de las finalidades de las observaciones de Russell de 1901 han sobrevivido. Hace un cuarto de siglo, aquellos que eran incapaces de ver la gran luz que los profetas aseguraban estaba iluminado como el sol del medio día en un firmamento de la media noche eran llamados simplemente estúpidos. En la actualidad para cada partidario competente del bando de los profetas existe un partidario igualmente competente frente a él. Si la estupidez existe en alguna parte está tan uniformemente distribuida que ha cesado de ser un carácter distintivo. Hemos entrado en una nueva era, tina era de humildad, llena de dudas.

En el lado de los dudosos encontramos por esa misma época (1905) a Poincaré. "He hablado... de nuestra necesidad a volver continuamente a los primeros albores de nuestra ciencia, y de las ventajas de esto para el estudio de la mente humana. Esta necesidad ha inspirado dos empresas que han adquirido un lugar muy importante en el desarrollo más reciente de la Matemática. La primera es el cantorismo... Cantor introdujo en la ciencia una nueva forma de considerar el infinito matemático... pero ha ocurrido que hemos encontrado ciertas paradojas, ciertas aparentes contradicciones, que hubieran hecho las delicias de Zenón de Elea y de la Escuela de Megara. Así, cada uno debe buscar el remedio. Por mi parte, y no estoy solo, pienso que lo importante es no introducir jamás entidades no completamente definibles por un número finito de palabras. Siempre que se adopte el cuidado necesario, podemos prometernos el goce que siente el médico llamado a tratar un interesante caso patológico".

Pocos años más tarde el interés de Poincaré por la patología disminuyó algo. En el Congreso Matemático Internacional de 1908, celebrado el Roma, el saciado médico pronunció su pronóstico: "las generaciones posteriores considerarán la *Mengenlehre* como una enfermedad de la cual nos hemos restablecido".

Corresponde a Cantor el gran mérito de haber descubierto, a pesar de sí mismo y contra sus propios deseos, que el "cuerpo matemático" está profundamente enfermo y que la enfermedad con que Zenón la infectó no ha encontrado aún alivio. Su perturbador hallazgo es un hecho curioso dé su propia vida intelectual. Examinaremos primeramente los acontecimientos de su existencia material, no de mucho interés por sí mismos, pero que quizá sean singularmente aclaratorios para los aspectos ulteriores de su teoría.

Descendiente de judíos puros por ambas ramas, Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor fue el hijo mayor del próspero comerciante Georg Waldemar Cantor y de su mujer María Bohm. El padre había nacido en Copenhague, Dinamarca, pero emigró siendo joven a San Petersburgo, Rusia, donde nació el matemático Georg Cantor el 3 de marzo de 1845. Una enfermedad pulmonar fue causa de que el padre se trasladara en 1856 a Francfort, Alemania, donde vivió en un cómodo retiro hasta su muerte en 1863. Debido a esta curiosa mezcla de nacionalidades es posible que diversas patrias reclamen a Cantor como hijo. Cantor se inclinó hacia Alemania, pero no puede decirse que Alemania le favoreciera muy cordialmente.

Georg tuvo un hermano, Constantin, que llegó a ser oficial del ejército alemán (excelente carrera para un judío), y una hermana, Sophie Nobiling. El hermano fue un buen pianista, la hermana dibujaba de un modo perfecto, y la naturaleza artística reprimida de Georg encuentra una turbulenta salida en la Matemática y la filosofía, tanto clásica como escolástica. El marcado temperamento artístico de los hijos fue herencia de su madre, cuyo abuelo era un conocido músico. Uno de sus hermanos que vivía en Viena, fue maestro del celebrado violinista Joachim. Un hermano de María Cantor fue músico, y uno de sus sobrinos pintor. Si es cierto, como reclaman los defensores psicológicos de la parda mediocridad, que la normalidad y la estabilidad flemática son equivalentes, toda la brillantez artística de su familia puede haber sido la raíz de la inestabilidad de Cantor.

La familia era cristiana. El padre se había convertido al protestantismo, y la madre, desde su nacimiento, fue católica romana. Como su archienemigo Kronecker, Cantor prefirió el lado protestante, y adquirió un gusto singular por la infinita suspicacia de la teología medieval. De no haber sido matemático, es muy posible que hubiera dejado su huella en la filosofía o en la teología. Como una cuestión de interés puede decirse a este respecto que la teoría de Cantor del infinito fue ansiosamente captada por los jesuitas, cuyas agudas mentes lógicas descubrieron en su fantasía matemática más allá de su teológica comprensión, pruebas indudables de la existencia de Dios y de la afinidad de la Santísima Trinidad con su tres-uno, uno-tres, co-igual y co-eterno. Añadiremos que Cantor, que tenía una aguda visión y una lengua todavía más aguda cuando estaba irritado, ridiculizó el pretencioso absurdo de tales pruebas, aunque fuera un devoto cristiano y un conocedor de la teología.

Los primeros estudios de Cantor fueron semejantes a los de la mayor parte de los matemáticos eminentes. Su gran talento y su interés absorbente por los estudios matemáticos fueron reconocidos precozmente (antes de cumplir los 15 años). Su primera educación fue confiada a un preceptor particular, y después siguió un curso en una escuela elemental en San Petersburgo. Cuando la familia se trasladó a Alemania, Cantor asistió primero a algunas escuelas privadas de Francfort y de Darmstadt, ingresando luego en el Instituto de «Tiesbaden» en 1860, cuando tenía 15 años.

Georg estaba decidido a ser matemático, pero su práctico padre, reconociendo la capacidad matemática del muchacho, intentó obstinadamente forzarle a que siguiera los estudios de ingeniería, por ser una profesión más lucrativa. Con motivo de la confirmación de Cantor en 1860, su padre le escribe expresando las esperanzas que han puesto en él todos sus numerosos tíos, tías y primos en Alemania, Dinamarca y Rusia: "Esperan de ti que llegues a ser nada menos que un Theodor Schaeffer, y más tarde, si Dios lo permite, un astro luminoso en el firmamento de la ingeniería". ¿Cuándo reconocerán los padres la presuntuosa estupidez de intentar enganchar a un carro un caballo de carreras?

La piadosa apelación a Dios con la que se pretendía someter al sensible y religioso joven de 15 años hubiera sido rechazada, en nuestra generación, como se rechaza una pelota de fútbol. Pero a Cantor le produjo una grave impresión. Queriendo mucho a su padre, y siendo profundamente religioso, el joven Cantor no podía ver que el anciano estaba justificando simplemente su propia ambición de dinero. Así comenzó la primera desviación de la sensible y aguda mente de Georg Cantor. En lugar de rebelarse, como seguramente lo haría un muchacho de talento de nuestros días, Georg se sometió, hasta que su obstinado padre comprendió que estaba arruinando la vocación de su hijo. Pero en el intento de agradar a su padre en contra de sus propios instintos, Georg Cantor sembró la simiente de la autodesconfianza, que harían de él una fácil víctima del pernicioso ataque de Kronecker llevándolo a dudar del valor de su propia obra. Si Cantor hubiese sido educado como un ser humano independiente jamás habría tenido el humilde respeto a los hombres de reputación establecida que tanto le perjudicó en toda su vida.

El padre cedió cuando el error había sido ya cometido. Para completar la instrucción de Georg, cuando tenía 17 años, el "querido papá" le permitió seguir la carrera matemática universitaria, "Mi querido papá, escribía Georg lleno de gratitud juvenil, podréis daros cuenta del gran placer que me ha producido su carta. Ella establece mi futuro... Ahora soy feliz cuando veo que no se disgustará si sigo mis sentimientos preferidos. Espero que usted, querido padre, ha de vivir para encontrar un placer en mi conducta, dado que mi alma, todo mi ser, vive en mi vocación; lo que un hombre desea hacer y a lo que su compulsión interna le empuja, lo cumplirá". El "papá" no

dudó que merecía este agradecimiento, aunque la gratitud de Georg pueda parecer demasiado servil para esta época.
Cantor comenzó sus estudios universitarios en Zurich, en 1862, pero pasó a la Universidad de Berlín al siguiente año, después de la muerte de su padre. En Berlín se especializó en Matemática, filosofía y física. Dividió su interés entre las dos primeras, y jamás tuvo por la física una verdadera afición. En Matemática los profesores fueron Kummer, Weierstrass y su futuro enemigo Kronecker. Siguiendo la costumbre alemana, Cantor pasó breve tiempo en otra Universidad, y cursó el semestre de 1866 en Göttingen.
Con Kummer y Kronecker en Berlín, la atmósfera matemática estaba altamente cargada de Aritmética. Cantor hizo un profundo estudio de las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss, y escribió, en el año 1867, su disertación, aceptada para aspirar al título de doctor sobre un punto difícil que Gauss había dejado a un lado respecto a la solución en números enteros x, y, z de la ecuación indeterminada

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$

donde *a*, *b*, *c* son números enteros. Era un excelente trabajo, pero puede afirmarse que ningún matemático que lo leyera podría vaticinar que el autor, de 22 años, llegaría a ser uno de los más originales creadores de la historia de la Matemática. No hay duda de que el talento se refleja en este primer ensayo, pero no se ve el genio. No hay un solo indicio de gran creador en esta disertación rigurosamente clásica.
Lo mismo puede decirse de todas las obras publicadas por Cantor antes de los 29 años. Eran excelentes, pero podrían haber sido hechas por cualquier hombre brillante que hubiera comprendido totalmente, como Cantor lo hizo, el concepto de las demostraciones rigurosas de Gauss y Weierstrass. El primer amor de Cantor fue la teoría gaussiana de números, hacia la cual se sintió atraído por la dificultad, nitidez y clara perfección de las pruebas. A partir de estos estudios, bajo la influencia de la escuela de Weierstrass, pasó al Análisis riguroso, particularmente a la teoría de las series trigonométricas (series de Fourier).
Las sutiles dificultades de esta teoría (donde las cuestiones de la convergencia de las series infinitas son menos fácilmente accesibles que en la teoría de las series de potencias) parecen haber incitado a Cantor a penetrar más profundamente en los fundamentos del Análisis que cualquiera de sus contemporáneos, y así se vio llevado al estudio de la Matemática y de la filosofía del infinito mismo, que está en el fondo de todas las cuestiones referentes a la continuidad, los límites y la convergencia. Justamente antes de cumplir los treinta años Cantor publicó su primer trabajo revolucionario (en el *Journal* de Crelle) sobre la teoría de conjuntos, que luego describiremos. El inesperado y paradójico resultado referente al conjunto de *todos los* números algebraicos, que Cantor estableció en este trabajo, y la completa novedad de los métodos empleados señalaron inmediatamente al joven autor como un matemático creador de originalidad extraordinaria. El hecho de que no todos aceptaran los nuevos métodos es cuestión aparte; lo que universalmente se admitió era que había aparecido un hombre que había hecho algo fundamentalmente nuevo en Matemática. Debería, por tanto, ser nombrado para un cargo de importancia.
La carrera material de Cantor fue la de cualquiera de los profesores alemanes de Matemática menos eminentes. Jamás logró su ambición de, una cátedra en Berlín, posiblemente la más alta distinción alemana durante el período de la grandeza y de la mayor fecundidad creadora de Cantor (1874-1884, desde los 29 a los 39 años). Toda su carrera profesional activa transcurrió en la Universidad de Halle, una institución de tercer orden, donde fue nombrado *Privatdozent*

(profesor que vive de las matrículas pagadas por sus alumnos), en 1869, a la edad de 24 años. En 1872 fue nombrado profesor ayudante, y en 1879, antes de que la crítica de su obra comenzara a adquirir el carácter de un malicioso ataque personal, fue nombrado profesor ordinario. Sus primeras tareas docentes tuvieron lugar en una escuela femenina de Berlín. Fue habilitado para esta inadecuada tarea después de haber asistido a las áridas conferencias sobre pedagogía pronunciadas por una mediocridad matemática.
Justamente o injustamente Cantor culpó a Kronecker de su fracaso para lograr el ansiado cargo en Berlín. Algunas veces se ha aludido al agresivo sentido gregario de los judíos como un argumento en contra de su nombramiento para actividades académicas; sin embargo no existen odios académicos más violentos que los que pueden separar a un judío de otro cuando está en desacuerdo en materias puramente científicas, o cuando uno de ellos siente celos o temores del otro. Los gentiles se ríen de estos odios que muchas veces les capacitan para cumplir sus rencorosos fines, bajo el disfraz de sincera amistad. Cuando dos intelectuales judíos riñen están en desacuerdo en todo, se acometen como perros, y hacen todo lo que está en su mano para cortar el cuello a su contrincante. Al fin y al cabo quizás sea una forma más decente de combatir, si es que los hombres deben combatir, que la refinada hipocresía de los demás. El objeto de cualquier guerra es destruir al enemigo, y ser sentimental o caballero en un asunto de este tipo es signo de ser mal luchador. Kronecker fue uno de los luchadores mejores en a historia de la controversia científica; Cantor uno de los menos competentes. Kronecker ganó. Pero, como se verá más tarde, la amarga animosidad de Kronecker hacia Cantor no fue totalmente personal, sino, al menos en parte, científica y desinteresada.
El año 1874, cuando apareció el primer trabajo revolucionario de Cantor sobre la teoría de conjuntos fue también el de su matrimonio (tenía 29 años) con Vally Guttmann. Dos hijos y cuatro hijas nacieron de este matrimonio. Ninguno de los hijos heredó la capacidad matemática del padre.
Pasando la luna de miel en Interlaken, conoció un trabajo de Dedekind, quizá el mejor matemático de su época que hizo un serio y simpático intento para comprender la subversiva teoría de Cantor.
Por ser *persona non grata* para los máximos matemáticos de la Alemania del último cuarto del siglo XIX, el profundamente original Dedekind estaba en una posición adecuada para simpatizar con el científicamente menospreciado Cantor. Los profanos suelen imaginar que la originalidad recibe siempre una bienvenida cordial en la ciencia. La historia de la Matemática contradice esta feliz fantasía: el camino de transgresor en una. ciencia bien establecida es probablemente tan áspero como en cualquier otro campo del conservatismo humano, hasta cuando el transgresor ha encontrado algo de valor que supere los estrechos límites de la fanática ortodoxia.
También Dedekind realizó todos sus trabajos ocupando mediocres posiciones; la hipótesis -ahora que la obra de Dedekind es reconocida como una de las más importantes contribuciones a la Matemática que Alemania ha hecho de que Dedekind *prefería* permanecer en lugares secundarios, mientras que los hombres que en ningún sentido eran superiores a él gozaban de la gloria y de la estima pública y académica, chocará a los observadores "arios"
El ideal de los eruditos germanos del siglo XIX era la "seguridad en primer término", y quizá se mostraba esta tendencia en la prudencia gaussiana contra todos los trabajos demasiados radicales. El nuevo hallazgo podría ser concebible, pero no absolutamente exacto. Al fin y al cabo, una enciclopedia bien editada es en general una fuente de información más útil acerca de la manera de volar las alondras que un poema de Shelley sobre la misma cuestión.
En esta atmósfera almibarada, la teoría de Cantor del infinito, una de las contribuciones más revolucionarias a la Matemática de los últimos 2.500 años, gozaba de la misma libertad que una

alondra que intenta volar en una atmósfera de engrudo. Hasta en el caso de que la teoría fuera totalmente errónea, y existen algunos que creen que no puede ser mantenida en ninguna forma que se parezca al pensamiento emitido por Cantor, merece algo más que los ataques que recibió, principalmente debido a que era nueva y no tenía nombre en el sagrado calendario de la Matemática ortodoxia.

El trabajo que abrió la senda, publicado en 1884, está dedicado a establecer una propiedad totalmente inesperada y notablemente paradójica del conjunto de *todos los* números algebraicos. Aunque ya hemos hablado de tales números en los capítulos precedentes, volveremos a recordar lo que son, para que se aprecie claramente la naturaleza del hecho asombroso que Cantor demostró, y al decir "demostró" pasamos por alto deliberadamente, por el momento, todas las dudas acerca de la solidez del razonamiento utilizado por Cantor.

Si r satisface una ecuación algebraica de grado n de coeficientes enteros racionales (números enteros comunes) pero no satisface ecuaciones de grado menor que n, entonces r es un número algebraico de grado n.

Esto puede ser generalizado. Es fácil demostrar que cualquier raíz de una ecuación del tipo

$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_{n-1}x + c_n = 0$$

en la cual las c son números algebraicos cualquiera (según se han definido antes), es un número algebraico. Por ejemplo, de acuerdo con este teorema, todas las raíces de

$$(1-3\sqrt{-1})x^2 - (2+5\sqrt{17})x + \sqrt[3]{90} = 0$$

son números algebraicos, porque los coeficientes lo son. (El primer coeficiente satisface $x^2 - 2x + 10 = 0$, el segundo, $x^2 - 4x - 421 = 0$, el tercero, $x^3 - 90 = 0$, de los grados respectivos 2, 2, 3).

Imagine el lector, si puede, el conjunto de *todos* los números algebraicos. *Entre* éstos estarán *todos* los números enteros racionales positivos, 1, 2, 3..., puesto que cualquiera de ellos, por ejemplo n, satisface una ecuación algebraica en la cual los coeficientes (1, y $-n$) son enteros racionales. Pero *además de éstos,* el conjunto de *todos* los números algebraicos contiene *todas* las raíces de *todas* las ecuaciones cuadráticas de coeficientes enteros racionales, y todas las raíces de *todas* las ecuaciones cúbicas de coeficientes enteros racionales, y así indefinidamente. ¿No es *intuitivamente evidente* que el conjunto de todos los números algebraicos contendrá *infinitamente más* números que su subconjunto de los enteros racionales 1, 2, 3, ...? Podrá, en efecto, ser así, pero ello es falso.

Cantor demostró que el conjunto de todos los enteros racionales 1, 2, 3... contiene precisamente tantos números como el "infinitamente más numeroso" conjunto de *todos* los números algebraicos.

Una prueba de esta afirmación paradójica no se puede dar en este lugar, pero puede hacerse fácilmente inteligible el tipo de recurso, el de "correspondencia uno a uno", sobre el cual se basa la demostración. Esto llevará a las mentes de tipo filosófico una comprensión de lo que es un *número cardinal.* Antes de explicar este simple pero algo ilusorio concepto, será útil examinar una opinión sobre ésta y otras definiciones de la teoría de Cantor que subraya una distinción entre las actitudes de algunos matemáticos y muchos filósofos respecto a todas las cuestiones que se refieren a "número" o "magnitud".

"Un matemático jamás define las magnitudes en sí mismas, como un filósofo está tentado a hacer; define su igualdad, su suma y su producto, y estas definiciones determinan, o más bien constituyen, todas las propiedades matemáticas de las magnitudes. De una manera aun más abstracta y más formal el matemático *establece* símbolos, y al mismo tiempo *prescribe* las reglas de acuerdo con las cuales deben ser combinados; estas reglas bastan para caracterizar estos símbolos y para darles un valor matemático. Brevemente, crea entidades matemáticas por medio de convenciones arbitrarias, en la misma forma como las diversas piezas del ajedrez se definen por los convenio que gobiernan sus movimientos y las relaciones entre ellas"[2]. No todas las escuelas del pensamiento matemático suscribirían estas opiniones, pero sugieren al menos, una "filosofía" responsable de la siguiente *definición* de números cardinales.

Obsérvese que la fase inicial en la definición es el concepto de "mismo número cardinal" en el espíritu de las observaciones iniciales de Couturat; el "número cardinal" surge, pues, como el ave fénix de las cenizas de su "igualdad". Trátase de una cuestión de *relaciones* entre conceptos no definidos explícitamente.

Se dice que dos conjuntos tienen el *mismo número cardinal* cuando todas las cosas de los dos conjuntos pueden ser *apareadas* una a una. Después del apareamiento no existen cosas sueltas en ninguno de los dos conjuntos.

Algunos ejemplos aclararán esta esotérica definición. Trátase de una de esas nimiedades obvias y fecundas que son tan profundas que pasan inadvertidas durante millares de años. Los conjuntos (x, y, z), . *(a, b, c)* tienen el mismo número cardinal (no cometeremos la tontería de decir: "¡Es natural! Cada uno contiene *tres letras"), debido* a que podemos *aparear* las cosas x, y, z del primer conjunto con las cosas a, *b*, c del segundo, del siguiente modo: *x* con *a*, *y* con *b, z* con c, y después de hacer esto se observará que ninguna cosa queda suelta en ambos conjuntos. Como es natural, existen otras formas de efectuar el apareamiento. Además, en una comunidad cristiana que practique la monogamia si 20 matrimonios se sientan a cenar, el conjunto de maridos tendrá el mismo número cardinal que el de mujeres.

Como otro ejemplo de esta "manifiesta" igualdad recordaremos el ejemplo de Galileo de la sucesión de todos los cuadrados enteros positivos y la de todos los enteros positivos

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, n^2, \ldots$$
$$1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$$

La diferencia "paradójica" entre éste y el ejemplo anterior se aprecia claramente: Si todas las mujeres se *retiran* a otro salón dejando a sus esposos bebiendo y charlando existirán precisamente 20 seres humanos sentados ante la mesa, justamente la mitad de los qué había antes. Pero si todos los cuadrados abandonan los números naturales, existirán tantos como existían antes: Nos plazca o no (no debería disgustarnos si fuéramos animales racionales) aparece ante nosotros el milagro de que *una parte de un todo puede tener el mismo número cardinal que el todo. Si* a alguien le disgusta la definición del "mismo número cardinal" por apareamiento puede pedírsele que invente otra mejor. La intuición (masculina, femenina o matemática) ha sido excesivamente valorada. La intuición es la raíz de toda superstición.

---

[2] L. Couturat, *De d'infini mathématique,* París, 1896, pág. 49. Con la advertencia de que gran parte de esta obra está anticuada, se puede recomendar por su claridad al lector general.
Una explicación de los elementos del cantorismo por un notable especialista polaco, que está dentro de la comprensión de cualquiera que tenga una mediana educación y cierto gusto por el razonamiento abstracto, se encuentra en las *Leqons sur les nombres transfinis,* por Waclaw Sierpinski, París, 1928. El prefacio de Borel proporciona las advertencias necesarias. El resumen mencionado de Couturat tiene cierto interés histórico en relación con el programa de Hilbert. Se anticipa treinta años a la enunciación de Hilbert de su credo formalista.

Obsérvese en este momento que ha sido glosada una dificultad de primera magnitud. ¿Qué *es un conjunto,* o *una clase? "That is the question",* repitiendo las palabras de Hamlet. Volveremos sobre esa cuestión, pero no daremos la respuesta. Quien consiga responder a la inocente pregunta satisfaciendo la crítica de Cantor quizá podrá hacer las más graves objeciones contra su ingeniosa teoría del infinito y al mismo tiempo establecer el Análisis matemático sobre una base no sentimental. Para apreciar que la dificultad no es trivial, intentemos imaginar el conjunto de *todos los* enteros racionales positivos 1, 2; 3... preguntándonos si, como hace Cantor, es posible retener esta totalidad que es una "clase", en nuestra mente como un objeto definido del pensamiento, tan fácilmente como la clase *x, y, z* de tres letras. Cantor nos obliga justamente a hacer esto para llegar a los números *transfinitos* que creó.

Procediendo ahora a la definición del "número cardinal", introducimos un término técnico conveniente: dos conjuntos o clases cuyos miembros pueden ser apareados uno con otros (como los ejemplos antes citados) se dice que son *semejantes. ¿Cuántas* cosas existen en el conjunto (o clase) *x, y, z*? Sin duda tres. Pero, ¿qué es "tres"? Una respuesta está contenida en la siguiente definición: "El *número* de cosas de una clase dada es la *clase* de todas las clases que son semejantes a la clase dada".

Esta definición no da en realidad explicación alguna; debe ser admitida como es. Fue propuesta en 1879 por Gottlob Frege, y además (independientemente) por Bertrand Russell en 1901. Una ventaja que tiene sobre otras definiciones de "número cardinal de una clase" es la de ser aplicable tanta a las clases finitas como a las infinitas. Quienes juzguen esta definición demasiado mística para la Matemática pueden evitarla, siguiendo el consejo de Couturat, y no intentar *definir* el "número cardinal". Sin embargo, en este camino también se tropieza con dificultades.

El resultado espectacular de Cantor de que el conjunto de todos los números algebraicos es semejante (en el sentido técnico antes definido) al subconjunto de todos los enteros racionales positivos, fue la primera de muchas propiedades completamente inesperadas de las clases infinitas. Concediendo por el momento que su razonamiento al descubrir estas propiedades es sólido, o al menos inobjetable en la forma en que Cantor lo estableció, lo que puede considerarse riguroso debemos admitir su fuerza.

Consideremos por ejemplo la "existencia" de números trascendentes. En un capítulo anterior vimos el tremendo esfuerzo que le costó a Hermite demostrar la trascendencia de un número *particular* de este tipo. Hasta nuestros días no se conoce un método general que pruebe la trascendencia de cualquier número que sospechamos es trascendente; cada nuevo tipo requiere la invención de especiales e ingeniosos métodos. Se sospecha, por ejemplo, que el número (es una constante aunque su definición se considera que puede ser una variable) que se define como el limite de

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\log n$$

en que *n* tiende a infinito, es trascendente, pero no podemos demostrar que lo sea. Lo que se requiere es mostrar que esta constante no es una raíz de *cualquier* ecuación algebraica de coeficientes enteros racionales.

Todo esto plantea la cuestión: "¿Cuántos números trascendentes existen?" ¿Son *más* numerosos que los enteros o los racionales, o los números algebraicos como un todo, o son *menos* numerosos? Dado que (por el teorema de Cantor) los números enteros, los racionales y *todos los* números algebraicos son igualmente numerosos, la cuestión que se plantea es ésta: ¿Pueden los números trascendentales ser contados como 1, 2, 3...? ¿Es la clase de todos los números trascendentes *semejantes* a la clase de todos los enteros racionales positivos? La respuesta es no; los trascendentes son *infinitamente más numerosos que los enteros.*

Aquí comenzamos a entrar en los aspectos discutidos de la teoría de conjuntos. La conclusión enunciada era como un desafío para un hombre del temperamento de Kronecker. Discutiendo la demostración de Lindemann, de que *n* es trascendente (véase Capítulo XXIV), Kronecker preguntaba: "¿Qué uso tiene su bella investigación referente a *n?* ¿Por qué estudia tales problemas, dado que los números irracionales (y por tanto los trascendentes) no existen?" Podemos imaginar el efecto del escepticismo de la prueba de Cantor de que los transcendentes son infinitamente más numerosos que los enteros 1, 2, 3... los cuales, según Kronecker, son la obra más noble de Dios y los *únicos* números que "existen".

No seria posible en este lugar pretender hacer ni siquiera un resumen de la demostración de Cantor, pero de las siguientes consideraciones podrá deducirse cierta idea respecto al tipo de razonamiento que empleó. Si una clase es semejante (en el sentido técnico antes mencionado) a la clase de todos los enteros racionales positivos, la clase se dice que es *numerable.* Las cosas en una clase numerable pueden ser contadas, como 1, 2, 3...; las cosas en una clase no numerable no pueden ser contadas como 1, 2, 3...; existirán más cosas en una clase no numerable que en una clase numerable. ¿Existen las clases no numerables? Cantor así lo demostró. En efecto, las clases de todos los puntos sobre cualquier segmento lineal, sin importar que el segmento sea pequeño (siempre que sea más que un solo punto), es no numerable.

Tenemos así un indicio del porqué los números trascendentes son no numerables. En el capitulo sobre Gauss vimos que cualquier raíz de cualquier ecuación algebraica es representable por un punto del plano de la Geometría cartesiana. Todas estas raíces forman el conjunto de todos los números algebraicos que Cantor demostró eran numerables. Pero si los puntos sobre un simple segmento lineal son no numerables, se deduce que *todos* los puntos del plano cartesiano son igualmente no numerables. Los números algebraicos están distribuidos en el plano como las estrellas sobre un cielo oscuro; la densa oscuridad es el firmamento de los trascendentes.

Lo más notable de la demostración de Cantor es que no proporciona ningún medio para construir un solo número trascendente. Para Kronecker tal prueba carece totalmente de sentido. Muchos ejemplos menos decisivos de "pruebas de la existencia" despertaban su ira. Uno de ellos, en particular, tiene interés, pues profetizó la objeción de Brouwer al uso de la lógica clásica (aristotélica) en los razonamientos sobre conjuntos infinitos.

Un polinomio

$$ax^n + bx^{n-1} + o + l$$

en que los coeficientes *a, b ... l* son números racionales, se dice que será *irreducible si* no se puede descomponer en un producto de dos polinomios que tengan coeficientes racionales. Ahora bien, es un juicio lleno de significación para la mayor parte de los seres humanos afirmar, como Aristóteles afirma, que un determinado polinomio es o no es irreducible.

No así para Kronecker. Hasta que se obtenga algún proceso definido capaz de ser llevado a cabo en un número *finito* de etapas mediante el cual podamos establecer la reducibilidad de un polinomio dado, no tendremos derecho, dentro de la lógica, de acuerdo a Kronecker, a usar el concepto de irreducibilidad en nuestras pruebas matemáticas. Hacer otra cosa, según él, es incurrir en incongruencias en nuestras conclusiones y, a lo sumo, el uso de la "irreducibilidad" sin el proceso descripto, sólo puede darnos un veredicto de "no demostrado". Todo este razonamiento *no constructivo* es, según Kronecker, ilegítimo.

Como el razonamiento de Cantor en su teoría de las clases infinitas es de tipo no constructivo, Kronecker lo consideró como una forma peligrosa de locura matemática. Creyendo que la Matemática sería llevada al manicomio bajo la dirección de Cantor, y siendo un devoto apasionado de lo que él consideraba la verdad de esa ciencia, Kronecker atacó vigorosamente "la teoría positiva del infinito" y a su hipersensible autor con todas las armas que tuvo en su mano, con el trágico resultado de que no fue la teoría de conjuntos la que cayó en el manicomio, sino el propio Cantor. El ataque de Kronecker derrumbó al creador de la teoría.

En la primavera de 1884, cuando tenia cuarenta años, Cantor sufrió el primero de aquellos completos derrumbes que se repitieron con variable intensidad en el resto de su larga vida, y que lo llevaron con frecuencia a las clínicas mentales. Su temperamento explosivo agravó su mal. Los profundos ataques de depresión le humillaban ante sus propios ojos y comenzó a dudar de la solidez de su obra. Durante un intervalo lúcido solicitó de las autoridades universitarias de Halle que le trasladaran desde su cátedra de Matemática a una cátedra de filosofía. Buena parte de la teoría positiva del infinito fue realizada en el intervalo entre dos accesos. Al restablecerse de ellos se daba cuenta de que su mente se hacía extraordinariamente clara.

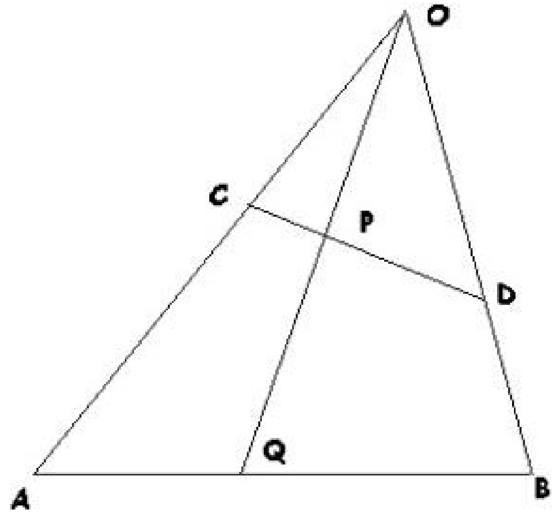
Kronecker ha sido quizá excesivamente culpado por la tragedia de Cantor; su ataque fue una de las muchas causas que contribuyeron a ella. La falta de reconocimiento amargó al hombre que creía había dado el primer y decisivo paso hacia una teoría racional del infinito, y esto le hizo caer en la melancolía y en la locura. Kronecker, sin embargo, parece que fue, en gran parte, responsable del fracaso de Cantor para lograr el cargo que deseaba en Berlín. De ordinario no se consideraba moral para un hombre de ciencia realizar un salvaje ataque a la obra de un contemporáneo ante sus discípulos. El desacuerdo puede ser tratado objetivamente en las revistas científicas. Kronecker comenzó en 1891 a criticar la obra de Cantor ante sus discípulos de Berlín, y era indudable que no existía espacio para ambos bajo el mismo techo. Como Kronecker ya estaba en posesión del cargo, Cantor tuvo que resignarse y renunciar a sus aspiraciones.

No carecía, sin embargo, de comodidades. El amable Mittag-Leffler no sólo publicó algunos de los trabajos de Cantor en su revista *(Acta Mathematica),* también consoló a Cantor en su lucha contra Kronecker. En un solo año, Mittag-Leffler recibió nada menos que 52 cartas del pobre Cantor. Entre los que creyeron en las teorías de Cantor, el genial Hermite fue uno de los más entusiastas. Su cordial aceptación de la nueva doctrina sirvió de gran alivio a Cantor: "Los elogios que Hermite me hace en su carta... respecto a la cuestión de la teoría de conjuntos son tan importantes en mi opinión, tan inmerecidos, que no me atrevo a publicarlos para no incurrir en el reproche de haber sido deslumbrado por ellos".

Al iniciarse el nuevo siglo la obra de Cantor sólo fue aceptada como una contribución fundamental a la Matemática, y particularmente a los fundamentos del Análisis. Pero, por desgracia para la teoría, las paradojas y antinomias que aun la infectan comenzaron a hacerse notar. Esta será, al fin, la máxima contribución que la teoría de Cantor está destinada a hacer a la Matemática, pues su existencia insospechada en los rudimentos del razonamiento lógico y matemático acerca del infinito fue la inspiración directa del actual movimiento crítico de todo razonamiento deductivo. Podemos, pues, esperar que así se alcance una Matemática más rica y "más verdadera", libre de incongruencias que la Matemática de la era precantoriana.

Los resultados más notables de Cantor fueron obtenidos en la teoría de los conjuntos *no numerables,* el ejemplo más sencillo de los cuales es el de todos los puntos en un segmento lineal. En este lugar sólo puede ser mencionada una de las más sencillas che sus conclusiones. Contrariamente a lo que la intuición pueda predecir, dos segmentos lineales desiguales contienen el *mismo número* de puntos. Recordando que dos conjuntos contienen el mismo número de cosas si éstas se pueden aparear una a una, y sólo en este caso, fácilmente veremos lo razonable de la

conclusión de Cantor. Colocar los segmentos desiguales *AB*, *CD co*mo en la figura. La línea OPQ corta *CD* en el punto *P, y AB* en Q; P
y Q son así apareados. Cuando OPQ gira alrededor de 0, el punto P corta a *CD,* mientras Q corta simultáneamente *AB, y cada* punto de CD tiene uno y solo un punto "apareado" con *AB.*



Aun se puede demostrar un resultado más inesperado. Todo segmento lineal, por pequeño que sea, contiene tantos puntos como una línea recta infinita. Además, el segmento contiene tantos puntos como existen en todo un plano, o en el total espacio tridimensional, o en la totalidad del espacio de *n* dimensiones (donde *n* es *cualquier* entero mayor que cero), o, finalmente, en un espacio de un número infinito numerable de dimensiones.

A todo esto todavía no hemos intentado definir una clase o un conjunto. Posiblemente (como Russell mantuvo en 1912) no es necesario hacer esto para tener una clara concepción de la teoría de Cantor, o para que la teoría sea congruente consigo misma, que ya es bastante exigencia para cualquier teoría matemática. De todo modos, la actual discusión parece requerir que se dé alguna definición clara y consecuente. La siguiente se ha considerado satisfactoria.

Un conjunto se caracteriza por tres cualidades: contiene todas las cosas a las cuales pertenece una cierta propiedad definida (por ejemplo el color, el volumen, el gusto); ninguna cosa que no tenga esa propiedad pertenece al conjunto; cada cosa del conjunto es reconocible como esa cosa, y como diferente de cualquier otra de las cosas del conjunto, brevemente, cada cosa del conjunto tiene una individualidad reconocible permanente. El mismo conjunto se debe considerar como un todo. Esta definición podrá ser demasiado drástica para su uso. Consideremos, por ejemplo, lo que sucede al conjunto de Cantor de todos los números trascendentes al obedecer a la tercera exigencia.

En este momento podemos contemplar retrospectivamente toda la historia de la Matemática, o la parte de ella revelada por los tratados de los maestros matemáticos en sus trabajos puramente técnicos, y observar dos formas de expresión que se repiten constantemente en casi todas las exposiciones matemáticas. El lector quizá se haya irritado por el uso repetido de frases, como "podemos encontrar un número entero mayor que 2", o "podemos elegir un número menor que *n y* mayor que *n - 2*". La elección de tal fraseología no es simplemente pedantería estereotipada. Existe una razón para su uso, y los escritores cuidadosos saben exactamente lo que dicen cuando afirman que "podemos encontrar, etc.". Dichos autores quieren decir que *pueden hacer lo que dicen.*

Frente a esta frase se halla otra que se repite una y otra vez en los trabajos matemáticos, "existe". Por ejemplo, algunos dicen "existe un número mayor que 2" o "existe un número menor que y mayor que n - 2". El uso de tal fraseología tiene lugar, sin duda, en el credo que Kronecker consideró insostenible, a no ser, como es natural, que la "existencia" sea demostrada por una construcción. La existencia no está probada para los conjuntos (como han sido definidas antes), que aparecen en la teoría de Cantor.

Estas dos formas de hablar divide a los matemáticos en dos tipos: los que dicen "nosotros podemos" creen (posiblemente de un modo subconsciente) que la Matemática es una invención puramente humana; los hombres que dicen "existe" creen que la Matemática tiene una "existencia" extrahumana por sí misma, y que "nosotros" simplemente actuamos sobre las "verdades eternas" de la Matemática en nuestro viaje por la vida, en la misma forma como un hombre, que pasa por tina ciudad, atraviesa cierto número de calles con cuya construcción no tiene nada que ver.

Los teólogos son hombres que dicen "existe"; los escépticos prudentes son en su mayor parte hombres que dicen "nosotros". "Existe una infinidad de números pares, o de primos", dicen los abogados de la "existencia" extrahumana; "los construimos" dice Kronecker y los hombres que afirman "nosotros".

En un famoso ejemplo del Nuevo Testamento puede verse que la distinción no es en modo alguno superficial. Cristo afirma que el Padre "existe"; Felipe pregunta: "Muéstranos al Padre y ello nos bastará". La teoría de Cantor está cercana a los partidarios de la "existencia". Es posible que la pasión de Cantor por la teología haya determinado su fidelidad. De ser así, tendríamos también que explicarnos por qué Kronecker, conocedor también de la teología cristiana, fue rabiosamente un hombre del tipo "nosotros".

Un ejemplo muy notable e importante del modo "existencia" de considerar la teoría de conjuntos proporciona el postulado de Zermelo (enunciado 1904). "Para todo conjunto *M* cuyos elementos son conjuntos P (es decir, *M* es un conjunto de conjuntos o una clase de clases), no estando vacías y no superponiéndose los conjuntos (ninguno de los dos contiene elementos comunes), existe al menos un conjunto N que contiene precisamente un elemento de cada uno de los conjuntos *P* que constituyen *M*". Comparando este concepto con la definición antes dada de un conjunto (o clase), se observará que los hombres "nosotros" no consideran el postulado evidente por sí mismo, si el conjunto *M* consiste, por así decir, en una infinidad de segmentos lineales que no se superponen. Aunque el postulado parece bastante razonable, los intentos para probarlo han fracasado. Es de considerable importancia en todas las cuestiones relacionadas con la continuidad.

Unas palabras acerca de cómo este postulado llegó a ser introducido en la Matemática plantearán otros problemas no resueltos de la teoría de Cantor. Una serie de cosas contables diferentes, como todos los ladrillos de una pared, se puede ordenar fácilmente; necesitamos sólo contarlas como 1, 2, 3..., en cualquiera de las múltiples y diferentes formas que ellas mismas sugieren. Pero, ¿cómo ordenar todos los puntos de una línea recta? No pueden ser contados como 1, 2, 3... La tarea parece infructuosa cuando consideramos que entre dos puntos cualesquiera de la línea "podemos encontrar" o "existen" otros puntos de la línea. Si cada vez que contamos dos ladrillos adyacentes surge otro entre ellos, en la pared, nuestra cuenta se hará confusa. De todos modos; los puntos de una línea recta parecen tener cierto tipo de orden, podemos decir si un punto está a la derecha o a la izquierda de otro, y así sucesivamente. Los intentos para ordenar los puntos de una línea no han dado buen resultado. Zermelo propuso su postulado como un medio para hacer el ensayo más fácil, pero no ha sido aceptado de un modo general como una suposición razonable o como un procedimiento de uso seguro.

La teoría de Cantor contiene aún más cuestiones acerca del infinito actual y de la "Aritmética" de los números transfinitos (infinitos) que las que aquí hemos indicado. Pero como la teoría está aún en la fase de discusión podemos seguir adelante considerándola como un enigma. ¿"Existe" o "podemos construir" un conjunto infinito que no es semejante (en el sentido técnico del apareo uno a uno) al conjunto de todos los enteros racionales positivos ni de todos los puntos de una línea? La respuesta no se conoce.
Cantor murió en un hospital de enfermedades mentales en Halle, el 6 de enero de 1918, teniendo 73 años. Ya le habían sido concedidos múltiples honores y su obra había logrado ser reconocida; hasta la antigua amargura contra Kronecker había sido olvidada. Fue, sin duda, una satisfacción para Cantor recordar que él y Kronecker se habían reconciliado, al menos superficialmente, algunos años antes de la muerte de Kronecker, ocurrida en 1891. Si Cantor viviera hoy podría estar orgulloso del movimiento que se ha producido hacia un pensamiento más riguroso en toda la Matemática, del cual es ampliamente responsable por sus esfuerzos para colocar el Análisis (y el infinito) sobre una base sólida.
Contemplando retrospectivamente la larga lucha para precisar y hacer utilizable en Matemática los conceptos de número real, continuidad, límite e infinito, vemos que Zenón y Eudoxio no están tan lejos de Weierstrass, Dedekind y Cantor, como podía suponerse pensando en los 24 ó 25 siglos que separan la Alemania moderna de la antigua Grecia. No hay duda de que poseemos un concepto más claro de la naturaleza de las dificultades que nuestros predecesores tuvieron, debido a que vemos los mismos problemas no resueltos surgiendo con nuevos aspectos y en campos en que los antiguos jamás soñaron. Pero decir que hemos eliminado las antiguas dificultades, es un error evidente. De todos modos, los resultados obtenidos significan un progreso mayor que el que nuestros predecesores pueden con justicia pretender haber logrado. Hemos calado más hondo, y hemos descubierto que algunas de las "leyes", por ejemplo las de la lógica aristotélica, que aceptaban en su razonamiento pueden ser reemplazadas con ventaja por otras, puras convenciones, en nuestros ensayos para relacionar nuestras experiencias. Como ya hemos dicho, la obra revolucionaria de Cantor dio el impulso inicial a nuestra actividad actual. Pero pronto se descubrió, 21 años antes de la muerte de Cantor, que esta revolución era demasiado revolucionaria o no suficientemente revolucionaria. Esto último parece ser lo cierto.
El primer brote de la contrarrevolución fue iniciado en 1897 por el matemático italiano Burali-Forti, quien presentó una flagrante contradicción mediante el razonamiento del tipo usado por Cantor en su teoría de conjuntos infinito. Esta paradoja fue tan sólo la primera de otras muchas, y como requeriría una larga explicación para hacerla inteligible la sustituiremos por la de Russell (año 1908).
Ya hemos mencionado a Frege, quien dio la definición de "la clase de todas las clases semejante a una clase dada" del número cardinal de la clase dada. Frege empleó muchos años intentando colocar la Matemática de los números sobre una base lógicamente sólida. La obra de su vida es un *Grundgesetze der Arithmetick* (*Las leyes fundamentales de la Aritmética*), de la cual el primer volumen fue publicado en 1893, y el segundo en 1903. En esta obra se usa el concepto de conjunto. También se hace un abundante empleo de invectivas más o menos sarcásticas contra los manifiestos dislates y múltiples estupideces en que incurrieron los que antes se habían ocupado de los fundamentos de la Aritmética. El segundo volumen termina con el siguiente párrafo:
"Un hombre de ciencia es difícil que encuentre algo más indeseable que ver cómo se derrumban los cimientos cuando la obra está terminada. Me he visto en esta situación por una carta de Mr. Bertrand Russell cuando la obra estaba casi en prensa".
Russell comunicó a Frege su ingeniosa paradoja de "el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de ellos mismos". ¿Es este conjunto un miembro de sí mismo? Ambas cuestiones

pueden ser consideradas como falsas meditando ligeramente sobre ellas. Sin embargo, Frege utilizó libremente el "conjunto de todos los conjuntos".
Se han propuesto muchas maneras para evadir o eliminar las contradicciones que comenzaron a explotar como una cortina de fuego sobre la teoría de Frege, Dedekind, Cantor de los números reales, continuidad y el infinito. Frege, Cantor y Dedekind abandonaron el campo batidos y descorazonados. Russell propuso su "principio del círculo vicioso" como un remedio: "Todo lo que englobe una colección no debe ser un miembro de la colección". Más tarde llevó adelante su "axioma de reducibilidad", el cual, como ha sido prácticamente abandonado, no merece ser descubierto. Durante un tiempo, estos métodos para restaurar la teoría fueron brillantemente eficaces (salvo para los matemáticos alemanes que jamás tragaron la píldora). Poco a poco, a medida que se abría camino el examen crítico de todo razonamiento matemático, la física fue lanzada a los perros, y se inició un esfuerzo concertado para descubrir cuál era realmente el mal del enfermo en su sistema de números irracionales y reales antes de administrar nuevos medicamentos.
El actual esfuerzo para comprender nuestras dificultades se origina en la obra de David Hilbert (1862-1942), de Göttingen, en 1899, y en la de L. E. J. Brouwer (1881) de Amsterdam, en 1912. Estos dos hombres y sus numerosos continuadores tienen la finalidad común de colocar el razonamiento matemático sobre una base sólida, aunque en diversos respectos sus métodos y filosofías estén en abierta oposición. Parece improbable que ambos puedan estar en. posesión de la verdad, como cada uno de ellos parece creer.
Hilbert se remontó a Grecia para la iniciación de su filosofía de la Matemática. Resumiendo el drama pitagórico de una serie de postulados rígida y completamente enunciados, de los cuales debería proceder por estricto razonamiento deductivo el argumento matemático, Hilbert hizo más preciso, de que había sido entre los griegos, el programa del desarrollo de la Matemática, por postulados y en 1899 apareció la primera edición de su obra sobre los fundamentos de la Geometría. Una cosa exigía Hilbert en la cual los griegos no parece que habían pensado, la de que los postulados propuestos para la Geometría deberán ser congruentes entre sí (libres de contradicciones ocultas, internas). Obtener tal prueba para la Geometría es mostrar que cualquier contradicción en la Geometría desarrollada por medio de postulados implicaría una contradicción en la Aritmética. El problema queda así desplazado para demostrar la coherencia de la Aritmética y así permanece actualmente.
Una vez más interrogamos a la esfinge para que nos diga lo que es un número. Tanto Dedekind como Frege huyeron al infinito, Dedekind con sus clases infinitas que definen los irracionales, Frege con su clase de todas las clases semejante a una clase dada que define un número cardinal, para interpretar los números que deslumbraron a Pitágoras. Hilbert busca la respuesta en el infinito, que, según cree, es necesario para una comprensión de lo finito. Subraya su creencia de que el cantorismo será definitivamente redimido del purgatorio en el cual se agita ahora. "La teoría de Cantor me parece el fruto más admirable de la mente matemática, y una de las conquistas más preciosas de los procesos intelectuales del hombre". Pero admite que las paradojas de Burali-Forti, Russell y otros no han sido aun resueltas: Sin embargo, su fe está por encima de todas las dudas: "Nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros". Pero en este momento de exaltación aparece Brouwe esgrimiendo en su mano derecha algo que parece una espada flameante. La persecución comienza: Dedekind, en el papel de Adán, y Cantor, disfrazado de Eva, miran temerosamente la salida bajo la hosca mirada del inflexible holandés. El método de los postulados para asegurar la libertad propuesto por Hilbert cumplirá, dice Brouwer, su fin, no producir contradicciones, pero "no podrá lograrse de este modo nada que tenga valor matemático; una teoría falsa que no se detiene por una contradicción no es por ello

menos falsa, lo mismo que un plan criminal que no esté frenado por un tribunal no es menos criminal".
Las raíces de la objeción de Brouwer al "placer criminal" de sus opositores son algo nuevo, al menos en Matemática. Brouwer objeta el uso ilimitado de la lógica aristotélica, particularmente al ocuparse de los conjuntos *infinitos,* y mantiene que tal lógica está llamada a producir contradicciones cuando se aplica a conjuntos que no pueden ser definitivamente *construidos* en el sentido de Kronecker (debe darse una regla por la cual se puedan construir las cosas). El principio de exclusión del tercer término (una cosa debe tener cierta propiedad o no debe tener esa propiedad, por ejemplo, en la afirmación de que un número es primo o no es primo) sólo puede usarse legítimamente cuando se aplica a conjuntos *finitos.*
Aristóteles ideó su lógica como un conjunto de reglas para conjuntos finitos, basando su método sobre la experiencia humana y no hay razón para suponer que una lógica que es adecuada para lo finito continuará produciendo resultados congruentes (no contradictorios) cuando se aplica al *infinito.* Tal modo de pensar parece suficientemente razonable cuando recordamos que la definición de un conjunto infinito subraya que una *parte* de un conjunto *infinito* puede contener precisamente tantas cosas como *todo* el conjunto (según hemos mencionado muchas veces). Una situación que jamás se produce para un conjunto finito, donde "parte" significa algo, *pero no todo* (como ocurre en la definición de un conjunto infinito).
Aquí tenemos lo que algunos consideran la raíz de la dificultad en la teoría del infinito actual de Cantor. La *definición* de un conjunto (según se ha enunciado tiempo atrás) según la cual *todas* las cosas que tienen cierta cualidad están "unidas" para formar un "conjunto" (o "clase"), no es adecuada como base para la teoría cantoriana en la que la definición no es constructiva (en el sentido de Kronecker) o supone una construcción que ningún mortal puede realizar. Brouwer pretende que el uso del principio de exclusión del tercer término en tal situación es, a lo sumo, una simple guía heurística para proposiciones que *pueden ser* verdaderas, pero que no es necesario que así ocurra, hasta cuando han sido deducidas por una rígida aplicación de la lógica aristotélica y dice que numerosas falsas teorías (incluyendo la de Cantor) han sido erigidas sobre este gastado fundamento durante el pasada medio siglo.
Tal revolución en los rudimentos del pensamiento matemático no podía dejar de ser combatida. El movimiento radical de Brouwer hacia la izquierda fue acelerado por un bramido de la derecha reaccionaria "Lo que Weyl y Brouwer están haciendo (Brouwer es él jefe, Weyl su acompañante en la revuelta) es seguir los pasos de Kronecker", decía Hilbert, el campeón del *status quo*. "Están intentando restablecer la Matemática lanzando por la borda todo lo que no les agrada y dificulta su acción. El efecto es desmembrar nuestra ciencia y correr el riesgo de perder una gran parte de nuestro capital más valioso. Weyl y Brouwer condenan los conceptos generales de números irracionales, de funciones (hasta de las funciones que se presentan en la teoría de números), los números transfinitos de Cantor, etc., el teorema de que una serie infinita de enteros positivos tiene un mínimo y hasta la ley de exclusión del tercer término, como por ejemplo la afirmación: existe sólo un número finito de números primos o existen infinitos. Trátase de teoremas y formas de racionamiento prohibidos (para ellos). Creo que lo mismo que Kronecker fue impotente para abolir los números irracionales, no menos impotentes resultarán los esfuerzos actuales. ¡No! El programa de Brouwer no es una revolución, sino simplemente la repetición de un vano golpe de mano con antiguos métodos, pero que ha sido emprendido con mayor inteligencia y fracasará de modo manifiesto. En la actualidad el Estado (la Matemática) está perfectamente armado y fortalecido merced a los trabajos de Frege, Dedekind y Cantor. Los esfuerzos de Brouwer y Weyl serán vanos".

A esto, el bando contrario replica encogiéndose de hombros, y continuando su gran y fundamentalmente nueva tarea de colocar la Matemática (particularmente los fundamentos del Análisis) sobre una base más firme que la que sirvió a los hombres de los últimos 2.500 años, desde Pitágoras a Weierstrass.
¿Cómo será la Matemática dentro de una generación, cuando, según esperamos, estas dificultades hayan desaparecido? Sólo un profeta o el séptimo hijo de un profeta puede introducir su cabeza en el peligroso lazo corredizo de la predicción. Pero si existe una continuidad en la evolución de la Matemática, y la mayoría de los observadores desapasionados creen que así es, la Matemática del futuro será más amplia, más firme y con un contenido más rico que la que nuestros predecesores conocieron.
A las controversias del pasado terció de siglo se han añadido ya nuevos campos -incluyendo lógicas totalmente nuevas, al vasto dominio de la Matemática, y lo nuevo está siendo rápidamente consolidado y coordinado con lo antiguo. Si podemos aventurar una predicción, diremos que lo que está por venir será más fresco, más joven en todos los respectos y más cercano al pensamiento humano y a las necesidades humanas, más libre de apelar para su justificación a "existencias" extrahumanas. El espíritu de la Matemática es eternamente joven. Como Cantor dijo: "La esencia de la Matemática reside en su libertad". La "revolución" presente es tan sólo otra afirmación de esa libertad.

Ofuscada y batida continúa trabajando,
fatigada y enferma del alma trabaja aún más,
sostenida por su voluntad indomable:
Las manos modelando y el cerebro profundizando,
y todo su dolor se convertido en trabajo,
hasta que la muerte, la enemiga amiga,
atravesando con su sable
ese poderoso corazón de corazones,
termine la amarga guerra.

James Thomson

ELLOS DICEN LO QUE DICEN, DEJADLOS DECIR.
(Lema del "Marischal College", Aberdeen)

1. La ciencia de la Matemática pura en su desarrollo moderno puede pretender ser la creación más original del espíritu humano. - *A. N. WHITEHEAD. (Science and the Modern World, 1925.)*

2. Una verdad matemática no es ni simple ni complicada por sí misma, es una verdad. - *ÉMILE LEMOINE.*

3. Un matemático que no tenga también algo de poeta jamás será un completo matemático. - *KARL WEIERSTRASS.*

4. He sido acusado de ser un opositor, un enemigo de la Matemática, que nadie puede valorar más que yo, pues realiza aquellas cosas cuyo logro me ha sido negado. - *GOETHE.*

5. Las Matemáticas son como los amantes. Conceded a un matemático el menor principio y obtendrá de él una consecuencia, que también habrá que concederle, y de esta consecuencia pasará a otra. - *FONTENELLE.*

6. Es más fácil cuadrar el círculo que refutar a un matemático. – *AUGUSTUS DE MORGAN.*

7. Lamento que haya sido necesario para mí en esta conferencia administrar una dosis tan grande de Geometría de cuatro dimensiones.. No me excuso, pues realmente no soy responsable por el hecho de que la naturaleza tenga cuatro dimensiones en su aspecto más fundamental. Las cosas son como son. - *A. N. WHITEHEAD (The Concept of Nature, 1920).*

8. El número gobierna el Universo. - *Los PITAGÓRICOS*.

9. La Matemática es la reina de las ciencias, la Aritmética la reina de la Matemática. - *C. F. GAUSS.*

10. El número puede decirse que gobierna el mundo de la cantidad, y las cuatro reglas de la Aritmética pueden ser consideradas como el equipo completo del matemático. - *JAMES CLERK MAXWELL*.

11. Las diferentes ramas de la Aritmética: la ambición, la distracción, la insolencia, el escarnio. - LA BURLONA TORTUGA (Alicia en el País de las Maravillas).Dios hizo los números enteros, el resto es obra del hombre. - *LEOPOLD KRONECKER.*

12. [La Aritmética] es una de las más viejas ramas, quizá la más vieja de todo el conocimiento humano; y, sin embargo, algunos de sus secretos más abstrusos están cerca de las verdades más simples. - *H. J. S. SMITH.*

13. Los escritos de Platón no convencen al matemático de que su autor haya sido un vigoroso partidario de la Geometría... Sabemos que fomentó la Matemática... Pero si -lo que nadie cree, (que no entre ningún hombre ignorante a la Geometría) de Tzetzes ha sido escrito sobre su puerta.- *AUGUSTUS DE MORGAN*.

14. No existe una carretera real para la Geometría. - *MENECMO (a ALEJANDRO EL GRANDE.*

15. Estudió y casi dominó los seis libros de Euclides, dado que fue miembro de Congreso. Inició un curso de rígida disciplina mental con el deseo de mejorar sus facultades, especialmente su capacidad para la lógica y su lenguaje. De aquí su inclinación hacia Euclides que no le abandonó hasta que pudo demostrar con facilidad todas las proposiciones de los seis libros; muchas veces estudiaba, hasta bien entrada la noche, con una bujía cerca de su almohada, mientras sus compañeros, media docena en una habitación, llenaban el aire con interminables ronquidos. *ABRAHAM LINCOLN (Breve autobiografía, 1860).*

16. Por extraño que parezca, la fuerza de la Matemática reside en pasar por alto todos los pensamientos innecesarios y en la maravillosa frugalidad de las operaciones mentales. - *ERNST MACH.*

17. Una simple curva, trazada a la manera de la curva de los precios del algodón, describe todo lo que el oído puede escuchar como resultado de las más complicadas composiciones musicales... En mi opinión esto es una maravillosa prueba de la potencia de la Matemática. - *LORD KELVIN*.

18. El matemático, que se encuentra bajo su diluvio de símbolos, y trabaja, al parecer, con verdades puramente formales, puede aún alcanzar resultados de infinita importancia para nuestra descripción del universo físico. - *KARL PEARSON.*

19. Los ejemplos... que pueden ser multiplicados *ad libitum*, muestran cuán difícil es muchas veces para un experimentador interpretar sus resultados sin la ayuda de la Matemática. *LORD RAYLEICH.*

20. Pero existe otra razón para la gran reputación de la Matemática: la de que la Matemática ofrece a las ciencias naturales exactas un cierto grado de seguridad que sin ella no podrían alcanzar. - *ALBERT EINSTEIN.*

21. La Matemática es el instrumento especialmente adecuado para trabajar con conceptos abstractos de cualquier tipo, y no existe un límite a su poder en este campo. Por esta razón un libro sobre la nueva Física, si no es puramente descriptiva de trabajos experimentales, debe ser esencialmente matemática. - *P. A. M. DIRAC (Quantum Mechanics, 1930).*

22. Al realizar el estudio de Faraday, percibo que este método de concebir fenómenos [de electromagnetismo era también matemático, aunque no aparezca en la forma convencional de los símbolos matemáticos. También encuentro que estos métodos podían ser expresados en las formas matemáticas ordinarias, y comparados así con los de los matemáticos verdaderos. - *JAMES CLERK MAXWELL (A Treatise on Electricity and Magnetism, 1873).*

23. Pregunta 64... ¿Qué matemáticos... no tienen sus misterios y, lo que es más, sus repugnancias y contradicciones? - *OBISPO BERKELEY.*

24. Para crear una filosofía sana hay que renunciar a la metafísica, pero ser un buen matemático. - *BERTRAND RUSSELL (De una conferencia, 1935).*

25. La Matemática es la única buena metafísica. - *LORD KELVIN.*

26. ¿Cómo puede ser que la Matemática, siendo al fin y al cabo un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, esté tan admirablemente adaptada a los objetos de la realidad? - *ALBERT EINSTEIN (1920).*

27. Cualquier nueva serie de descubrimientos es Matemática en forma, debido a que no podemos tener otra guía. - *C. G. DARWIN (1931).*

28. ¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre. - *DAVID HILBERT (1921).*

29. El concepto de infinito es nuestro mejor amigo; es también el mayor enemigo de nuestra paz mental... Weierstrass nos enseñó a creer que hemos al fin domado y domesticado completamente este elemento ingobernable. Sin embargo, no fue así; volvió a recobrar la libertad. Hilbert y Brouwer han venido a domarlo una vez más. ¿Por cuánto tiempo? Deseamos saberlo. - *JAMES PIERPONT (Bulletin of the American Mathematical Society, 1928).*

30. En mi opinión un matemático, en tanto que es un matemático, no necesita preocuparse de filosofía: una opinión que de todos modos ha sido expresada por muchos filósofos. - *HENRI LEBESGUE (1936).*

31. Dios algunas veces geometriza. - *PLATÓN.*

32. Dios algunas veces aritmetiza. - *C. G. J. JACOBI.*

33. El gran arquitecto del Universo comienza ahora a aparecer como un matemático puro. - *J. H. JEANS (The Mysierios Universe, 1930).*

34. La Matemática es la ciencia más exacta, y sus conclusiones pueden obtener la prueba absoluta. Pero esto es tan sólo debido a que la Aritmética no intenta deducir conclusiones absolutas. Todas las verdades matemáticas son relativas, condicionales. - *CHARLES PROTEUS STEINMETZ (1923).*

35. Es una buena regla afirmar que cuando un matemático o un filósofo escribe con una brumosa profundidad está diciendo algo carente de sentido. - *A. N WHITEHEAD (1911).*